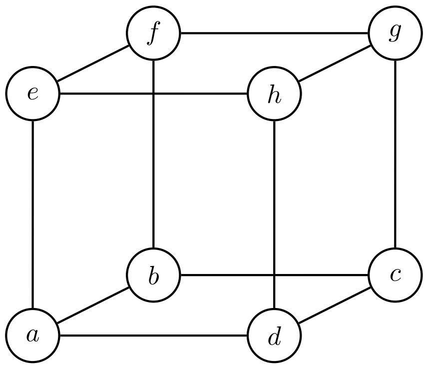
Cube magique

Depuis quelques jours, je suis plongé dans la vivifiante lecture du « Dictionnaire amoureux des mathématiques » d'André Deledicq et Mickaël Launay (chez Plon).

À la lettre « C » on y trouve les « Carrés magiques » bien connus et l'énigme que j'appelle le « Cube magique ».

1 L'énigme

Dans le cube représenté ci-dessous, il s'agit de remplacer chaque lettre de a à h par un nombre de 1 à 8 de façon que les sommes des 4 sommets de chaque face soient toutes égales.



Naturellement, deux lettres différentes doivent correspondre à deux nombres différents.

2 Un peu de LaTeX

Voici le code de ce cube :

```
\psset{unit=0.8cm,radius=10pt}
\begin{pspicture}(0,0)(8,7)
%%%%%%%%%%%%%%%% sommets
\Cnodeput(1,1){A}{$a$}  \Cnodeput(3,2){B}{$b$}
\Cnodeput(7,2){C}{$c$}  \Cnodeput(5,1){D}{$d$}
\Cnodeput(1,5){E}{$e$}  \Cnodeput(3,6){F}{$f$}
\Cnodeput(7,6){G}{$g$}  \Cnodeput(5,5){H}{$h$}
%%%%%%%%%%%%%%%% arêtes
\ncline{A}{B} \ncline{B}{C} \ncline{C}{D} \ncline{D}{A}
\ncline{E}{F} \ncline{F}{G} \ncline{G}{H} \ncline{H}{E}
\ncline{A}{E} \ncline{B}{F} \ncline{C}{G} \ncline{D}{H}
\end{pspicture}
```

Les sommets de ce cube ont été créés avec `Cnodeput` qui permet de dessiner un cercle et d'écrire directement à l'intérieur ; ainsi l'instruction `\Cnodeput(1,1){A}{a}` définit un cercle de centre le point de coordonnées (1,1) appelé A, et place la lettre `a` en son centre. Le rayon du cercle est défini par `radius=10pt` que l'on trouve dans `\psset`.

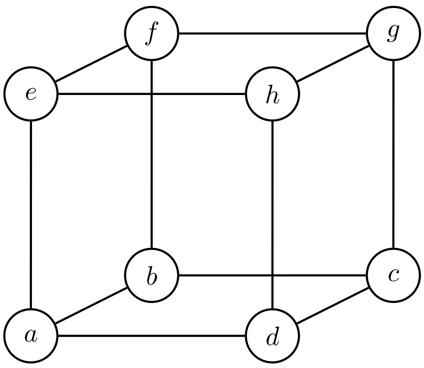
Les sommets (les nœuds) sont reliés entre eux par `\ncline{}{}` ; contrairement à `\psline` ou `\pspolygon`, on ne peut relier que deux nœuds entre eux. Mais on ne peut pas utiliser ces deux dernières instructions ici : essayez donc pour voir de remplacer `\ncline{A}{B}` (A et B entre accolades) par `\psline(A)(B)` (A et B entre parenthèses). Très moche !

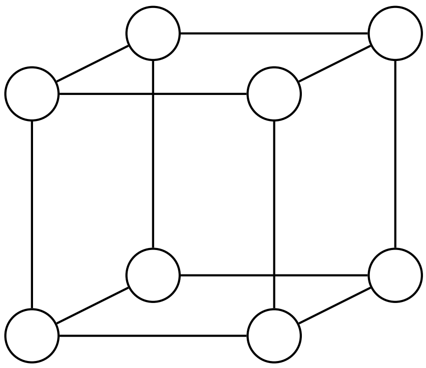
Si on utilise `\cnodeput` (avec un c minuscule) à la place de `\Cnodeput` (C majuscule), on ne contrôle plus le rayon de chaque cercle qui s'adapte automatiquement à son contenu : vous verrez plus loin pourquoi il vaut mieux utiliser `\Cnodeput`.

Comme dans cette chronique on va dessiner plusieurs cubes, il serait intéressant de créer une commande qui va faciliter le travail ; on définit donc la commande `\cube` avec 8 paramètres correspondant aux sommets du cube. Voici le code :

```
\newcommand{\cube}[8]
{%%% début
\psset{unit=0.8cm,radius=10pt}
\begin{pspicture}(0,0)(8,7)
%%%%%%%%%%%%%%% sommets
\Cnodeput(1,1){A}{$#1$}  \Cnodeput(3,2){B}{$#2$}
\Cnodeput(7,2){C}{$#3$}  \Cnodeput(5,1){D}{$#4$}
\Cnodeput(1,5){E}{$#5$}  \Cnodeput(3,6){F}{$#6$}
\Cnodeput(7,6){G}{$#7$}  \Cnodeput(5,5){H}{$#8$}
%%%%%%%%%%%%%%% arêtes
\ncline{A}{B} \ncline{B}{C} \ncline{C}{D} \ncline{D}{A}
\ncline{E}{F} \ncline{F}{G} \ncline{G}{H} \ncline{H}{E}
\ncline{A}{E} \ncline{B}{F} \ncline{C}{G} \ncline{D}{H}
\end{pspicture}
}%%% fin
```

Ainsi avec `\cube{a}{b}{c}{d}{e}{f}{g}{h} \hfill \cube{}{}{}{}{}{}{}{}`, on obtient :





C'est en tapant `\cube{}{}{}{}{}{}{}{}` que l'on se rend compte qu'il vaut mieux utiliser `\Cnodeput` que `\cnodeput`.

À ce stade, vous pouvez chercher vous-même les solutions. . . ou lire la suite !

3 La méthode de résolution

Première remarque

En calculant $1+2+3+4+5+6+7+8$, on trouve 36 donc $a+b+c+d+e+f+g+h=36$. Mais comme les sommes des 4 sommets de chaque face doivent être égales, on aura, par exemple : $a+b+c+d=e+f+g+h$. On en déduit que $a+b+c+d=e+f+g+h=18$ et que donc les sommes des 4 sommets de chaque face sont toutes égales à 18.

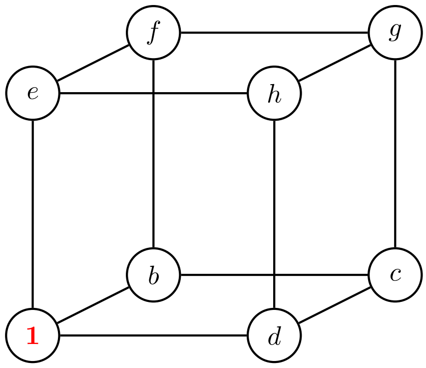
On a donc 6 équations correspondant aux 6 faces du cube : $\begin{cases} a+b+c+d &= 18 \\ e+f+g+h &= 18 \\ a+b+e+f &= 18 \\ c+d+g+h &= 18 \\ a+d+e+h &= 18 \\ b+c+f+g &= 18 \end{cases}$

Ce système de 6 équations à 8 inconnues a une infinité de solutions. En plus il faut rajouter comme contraintes que toutes les lettres ont des valeurs différentes et comprises entre 1 et 8.

Il faut donc être un peu plus astucieux !

Deuxième remarque

Les sommets sont tous identiques et aucun ne joue une rôle particulier ; on peut donc choisir de prendre $a = 1$:

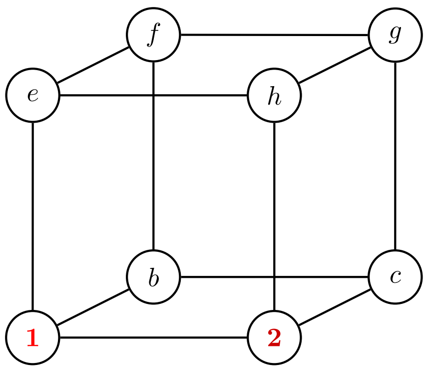


Une inconnue de moins !

Troisième remarque

Après avoir placé le nombre 1, essayons de placer le nombre 2.

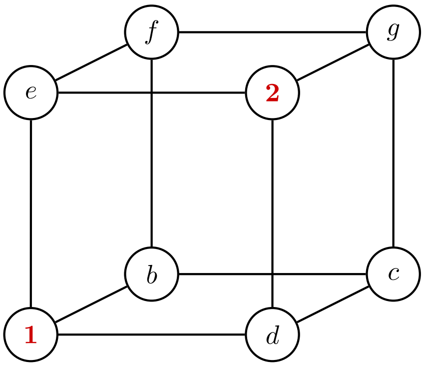
Peut-il être sur une même arête que le nombre 1, c'est-à-dire à la place de b, d ou e ? Voyons un cas possible avec 2 en d :



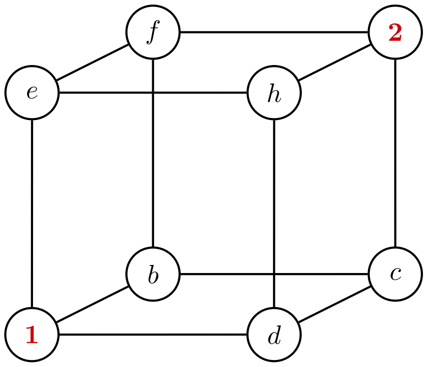
Comme la somme des sommets de chaque face vaut 18, on aura d'une part $a+b+c+d=18$ donc $b+c=15$, et d'autre part $a+d+e+h=18$ donc $e+h=15$. Mais pour avoir un total de 15 avec des nombres entiers entre 1 et 8, il faut prendre $7+8$ ou $8+7$; donc b et c valent 7 et 8, ou 8 et 7 ; il est donc impossible que $e+h$ soit égal à 15 puisque 7 et 8 sont déjà pris par b et c.

Autrement dit, les nombres 1 et 2 ne peuvent pas être aux extrémités d'une même arête.

S'ils sont sur une même face, ils seront sur la diagonale du carré (par exemple en a et h), sinon ils ne seront pas sur une même face donc ils seront sur la diagonale du cube (en a et g) :



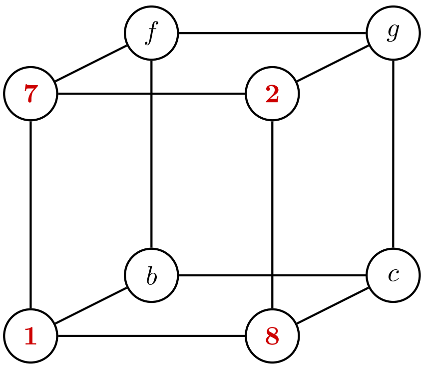
cas n° 1



cas n° 2

4 Première série de solutions – cas n° 1

On cherche les solutions quand les nombres 1 et 2 sont sur une même face (celle de devant). Il reste alors un total de 15 pour l'autre diagonale, que l'on obtient avec 7 et 8 ; on prendra ici $d=8$ et $e=7$ (mais on peut choisir $e=8$ et $d=7$) :



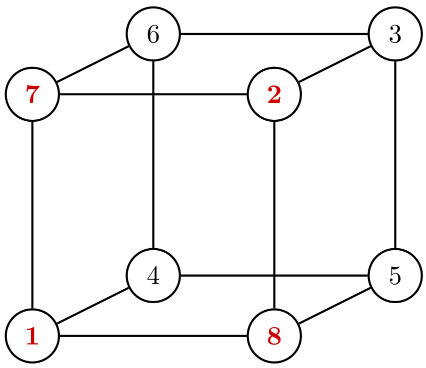
On a donc en regardant les 5 faces non complètes du cube : $\begin{cases} b+c &= 9 \\ b+f &= 10 \\ f+g &= 9 \\ c+g &= 8 \\ b+c+f+g &= 18 \end{cases}$ équivalent au système : $\begin{cases} b+c &= 9 \\ b+f &= 10 \\ f+g &= 9 \end{cases}$ c'est-à-dire : $\begin{cases} c &= 9-b \\ f &= 10-b \\ g &= 9-f \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} c &= 9-b \\ f &= 10-b \\ g &= b-1 \end{cases}$

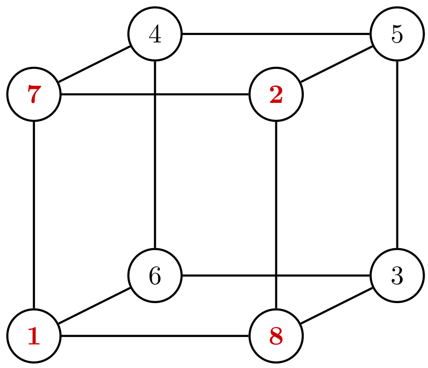
On n'oublie qu'il faut prendre b, c, f et g dans $\{3{,}4{,}5{,}6\}$.

On teste pour les valeurs de b entre 3 et 6.

- Si $b = 3$, on a $g = b - 1 = 2$; impossible.
- Si $b = 4$, on a $c = 9 - b = 5$, $f = 10 - b = 6$ et $g = b - 1 = 3$; cela donne une solution.
- Si $b = 5$, on a $c = 9 - b = 4$ et $g = b - 1 = 4$; impossible.
- Si $b = 6$, on a $c = 9 - b = 3$, $f = 10 - b = 4$ et $g = b - 1 = 5$; cela donne une solution.

Dans le cas n° 1 on n'a que deux solutions possibles (aux symétries près) :



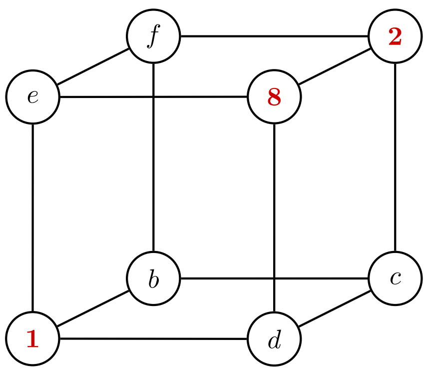


5 Seconde série de solutions – cas n° 2

On examine maintenant le second cas dans lequel les nombres 1 et 2 sont sur la grande diagonale du cube.

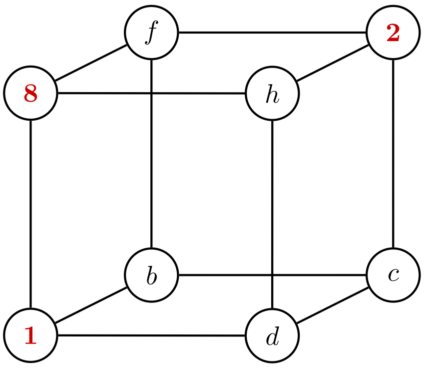
Placement du 8

Essayons de placer le nombre 8 sur une arête contenant le nombre 2, par exemple à la place de h :



En disant que la somme des nombres placés sur les sommets de la face de droite doit être égale à 18, on arrive à $c + d = 8$; et en disant que la somme des nombres placés sur les sommets de la face du bas doit être égale à 18, on arrive à $b + c + d = 17$ donc $b = 9$, ce qui est impossible.

On ne peut donc pas avoir 8 à la place de h et, en faisant le même raisonnement, ni à la place de c ni à celle de f. On peut donc mettre 8 à la place de b, d ou e, ce qui donne pour 8 en e :

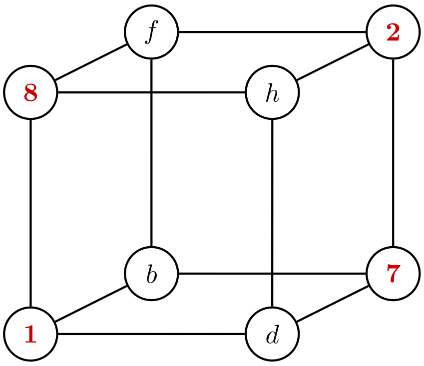


Placement du 7

Essayons maintenant de placer le nombre 7 :

- Si on met 7 à la place de d, on aura $h = 2$ (face de devant) ce qui est impossible.
- Si on met 7 à la place de h, on aura $d = 2$ (face de devant) ce qui est impossible.
- Si on met 7 à la place de b, on aura $f = 2$ (face de gauche) ce qui est impossible.
- Si on met 7 à la place de f, on aura $b = 2$ (face de gauche) ce qui est impossible.

Donc le nombre 7 doit être à la place de c :



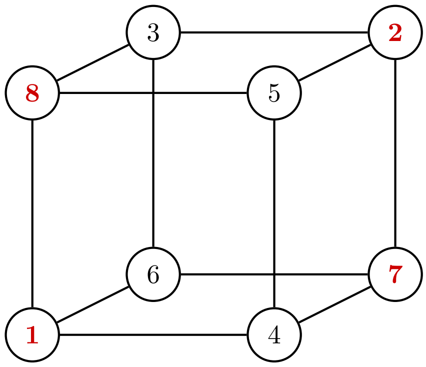
Fin de la résolution

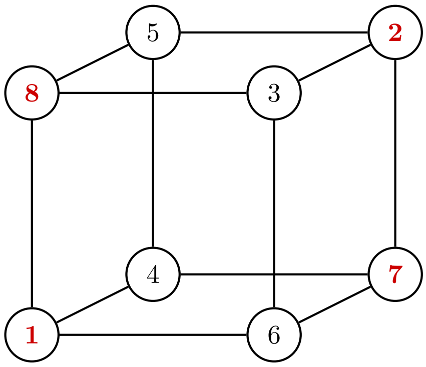
On a donc : $\left\{\begin{array}{rcr} d+h &=& 9 \\ b+f &=& 9 \\ f+h &=& 8 \\ b+d &=& 10 \end{array}\right.$ qui équivaut à : $\left\{\begin{array}{rcr} d &=& 10-b \\ f &=& 9-b \\ h &=& b-1 \end{array}\right.$

On teste pour les valeurs de b entre 3 et 6.

- Si $b = 3$, on a $h = b - 1 = 2$; impossible.
- Si $b = 4$, on a $d = 10 - b = 6$, $f = 9 - b = 5$ et $h = b - 1 = 3$; cela donne une solution.
- Si $b = 5$, on a $d = 10 - b = 5$; impossible.
- Si $b = 46$, on a $d = 10 - b = 4$, $f = 9 - b = 3$ et $h = b - 1 = 5$; cela donne une solution.

On a donc trouvé deux solutions :





On peut constater que ces deux solutions sont symétriques par rapport au plan (ACE).

6 Une autre énigme

On termine par une petite énigme (plus facile !) trouvée dans le livre cité au début de cette chronique.

Placer dans la figure ci-dessous les nombres 1, 2, 3, 4, 5 et 6 de façon que les sommes des quatre nombres situés sur un même cercle soient toutes égales.