Applications du produit scalaire (I) : relations métriques dans le triangle

▷ **Exercice 1.** Soit ABC un triangle tel que BC = 5 cm, AB = 8 cm et $\widehat{ABC} = 30°$

1. Calculer AC, $\widehat{BAC}$ et $\widehat{BCA}$.

- $AC^2 = BA^2 + BC^2 - 2BA \times BC\cos\widehat{ABC} = 89 - 80\cos 30°$ soit $AC^2 = 89 - 40\sqrt{3}$ d'où finalement : $AC = \sqrt{89-40\sqrt{3}} \approx 4,44\,cm$.
- $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC\cos\widehat{BAC}$ d'où $25 = 64 + 89 - 40\sqrt{3} - 2\times 8\sqrt{89-40\sqrt{3}}\cos\widehat{BAC}$ donc $\cos\widehat{BAC} = \dfrac{-128+40\sqrt{3}}{-16\sqrt{89-40\sqrt{3}}}$ et à la calculatrice, on obtient $\widehat{BAC} \approx 34,26°$
- $\widehat{BCA} = 180 - \widehat{BAC} - \widehat{ABC} \approx 115,74°$

2. Calculer, en cm^2, l'aire du triangle ABC.

$Aire(ABC) = \dfrac{1}{2}BA \times BC \times \sin\widehat{ABC} = \dfrac{1}{2}\times 8\times 5\sin 30° = 10\,cm^2$

3. La perpendiculaire en B à (BC) coupe la parallèle à (BC) passant par A au point D.

a) Calculer les longueurs DA, DB et DC.

- La droite (AB) coupe les droites parallèles (BC) et (AD) formant ainsi des angles alterne-internes d'où $\widehat{BAD} = \widehat{ABC} = 30°$ ainsi dans le triangle ABD rectangle en D, $\cos\widehat{DAB} = \dfrac{AD}{AB}$ $\iff AD = AB\cos\widehat{DAB}$ d'où $AD = 8\cos 30° = 4\sqrt{3}$
- $\widehat{ABD} = 180 - \widehat{BAD} - \widehat{ADB} = 60°$ donc $\cos\widehat{ABD} = \dfrac{BD}{AB} \iff BD = AB\cos\widehat{ABD}$ $\iff BD = 8\cos 60° = 4\,cm$

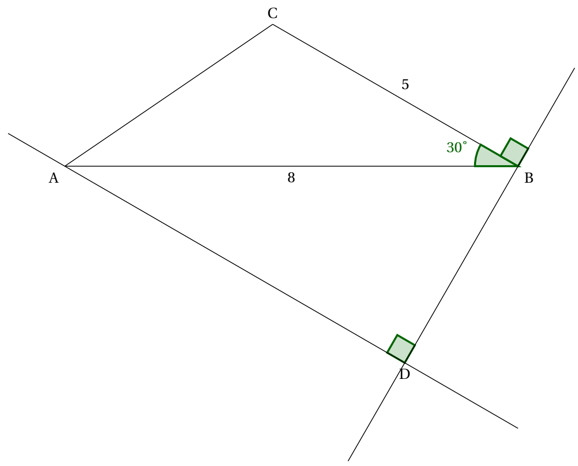
b) Calculer une mesure de l'angle $\widehat{ACD}$.

Le triangle BCD est rectangle en B donc d'après le théorème de Pythagore, $CD^2 = CB^2 + BD^2 = 41$ donc $CD = \sqrt{41}$.

Dans le triangle ACD, $AD^2 = CA^2 + CD^2 - 2CA.CD\cos\widehat{ACD}$ soit

$$\begin{aligned}\cos\widehat{ACD} &= \frac{CA^2+CD^2-AD^2}{2CA.CD}\\ &= \frac{89-40\sqrt{3}+41-(4\sqrt{3})^2}{2\sqrt{89-40\sqrt{3}}\times\sqrt{41}}\\ &= \frac{82-40\sqrt{3}}{2\sqrt{89-40\sqrt{3}}\sqrt{41}}\end{aligned}$$

d'où $\widehat{ACD} \approx 77,08°$

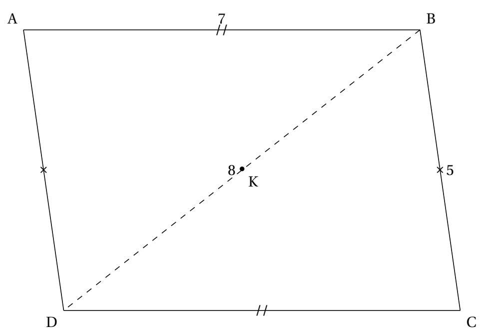


▷ **Exercice 2.** On considère un parallélogramme ABCD, de centre K, tel que : AB = 7, BC = 5 et BD = 8. Calculer la longueur AC.

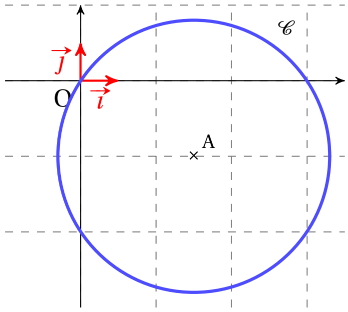
Dans le triangle ABD, $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD\cos\widehat{BAD} \iff \cos\widehat{BAD} = \dfrac{AB^2+AD^2-BD^2}{2AB\times AD}$ d'où $\cos\widehat{BAD} = \dfrac{10}{70} = \dfrac{1}{7}$ soit, à l'aide de la calculatrice, $\widehat{BAD} \approx 81,79°$

On en déduit que $\widehat{ADC} = \dfrac{1}{2}\left(360 - 2\times\widehat{BAD}\right) = 180 - \widehat{BAD} \approx 98,21°$.

Dans le triangle ADC, $AC^2 = DA^2 + DC^2 - 2DA \times DC\cos\left(\widehat{ADC}\right) = 74 - 70\cos\left(180-\widehat{BAD}\right) = 74 + 70\cos\widehat{BAD} = 74 + 70\times\dfrac{1}{7} = 84$ d'où $AC = 2\sqrt{21} \approx 9,17$.



▷ **Exercice 3.** Soit $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ un repère orthonormé.



1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de centre A(3 ; −2) et de rayon 3,6.

   $\mathscr{C} : (x-x_A)^2+(x-x_B)^2 = 3,6^2 \iff (x-3)^2+(y+2)^2 = 3,6^2$

2. L'origine O du repère appartient-elle à $\mathscr{C}$?

   Pour $x = 0$ et $y = 0$,

   $(x-3)^2+(y+2)^2 = (0-3)^2+(0+2)^2 = 13 \neq 3,6^2$ donc O(0 ; 0) $\notin \mathscr{C}$.

▷ **Exercice 4.**

1. Déterminer une équation du cercle de centre C(1 ; −3) et de rayon 5.

   $\mathscr{C} : (x-1)^2+(y+3)^2 = 5^2$

2. Le point A(−3 ; −6) est-il un point de ce cercle?

   Pour $x = -3$ et $y = -6$,

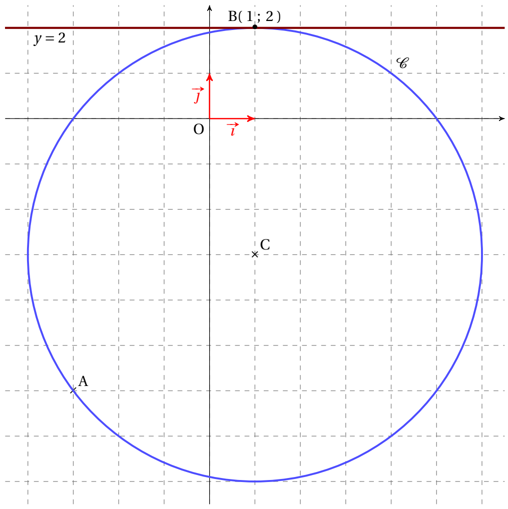
   $(x-1)^2+(y+3)^2 = (-3-1)^2+(-6+3)^2 = 25 = 5^2$ donc A(−3 ; −6) $\in \mathscr{C}$.

3. Déterminer les points d'ordonnée 2 de ce cercle.

   Les points du plan d'ordonnée 2 ont une abscisse x qui vérifie :

$$\begin{aligned}(x-1)^2+(2+3)^2 = 5^2 &\iff (x-1)^2 = 0\\ &\iff x-1 = 0\\ &\iff x = 1\end{aligned}$$

Ainsi, un seul point de $\mathscr{C}$ a pour ordonnée 2, il s'agit du point de coordonnées (1 ; 2).



▷ **Exercice 5.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points A(−4 ; 3) et B(8 ; −2).

1. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB].

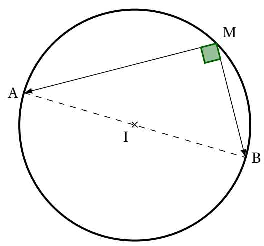
Méthode 1 : Le cercle de diamètre [AB] a pour centre le milieu I$\left(\dfrac{x_A+x_B}{2} ; \dfrac{y_A+y_B}{2}\right)\left(2 ; \dfrac{1}{2}\right)$ du segment [AB] et pour rayon

$r = \dfrac{1}{2}AB = \dfrac{1}{2}\sqrt{(x_B-x_A)^2+(y_B-y_A)^2} = \dfrac{13}{2}$

Ainsi $\mathscr{C} : (x-2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = \dfrac{169}{4}$

Méthode 2 : En utilisant le produit scalaire.

$$\begin{aligned}M(x ; y) \in \mathscr{C} &\iff \overrightarrow{MA}\begin{pmatrix}x+4\\y-3\end{pmatrix}\cdot\overrightarrow{MB}\begin{pmatrix}x-8\\y+2\end{pmatrix} = 0\\ &\iff (x+4)(x-8)+(y-3)(y+2) = 0\\ &\iff x^2-8x+4x-32+y^2+2y-3y-6 = 0\\ &\iff x^2-4x+y^2-y-38 = 0\\ &\iff (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2-4-\frac{1}{4}-38 = 0\\ &\iff (x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{169}{4}\end{aligned}$$



2. Montrer que le point E(2 ; 7) appartient au cercle $\mathscr{C}$.

   Pour $x = 2$ et $y = 7$, $(x-2)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2 = (2-2)^2+\left(7-\dfrac{1}{2}\right)^2 = 0+\left(\dfrac{13}{2}\right)^2 = \dfrac{169}{4}$ donc E(2 ; 7) $\in \mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle au point E.

La tangente (Δ) à $\mathscr{C}$ au point E est la perpendiculaire en E au rayon [IE]. $\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}0\\ \frac{13}{2}\end{pmatrix}$ et $2\overrightarrow{IE}\begin{pmatrix}0\\13\end{pmatrix}$ sont des vecteurs normaux à (Δ) d'où :

$(\Delta) : 0x + 13y + c = 0$ et $E(2\,;\,7) \in (\Delta) \iff 13 \times 7 + c = 0 \iff c = -91$. En conclusion : $(\Delta) : 13y = 91 \iff y = 7$

4. Déterminer les points R et T du cercle dont l'ordonnée est nulle.

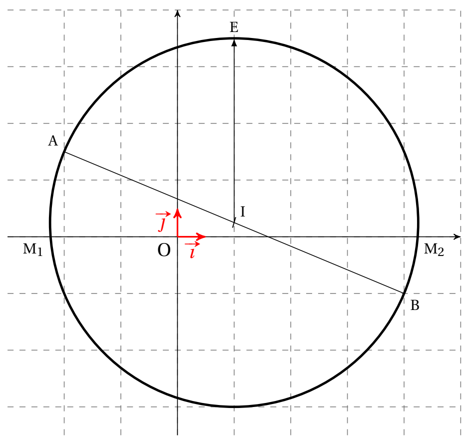
Un point $M(\,x\,;\,y\,)$ de $\mathscr{C}$ a pour ordonnées nulle si et seulement si :

$$\begin{cases}(x-2)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{169}{4}\\ y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-4x+4+\frac{1}{4}=\frac{169}{4}\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x^2-4x-38=0 \quad (\Delta=168)\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=\dfrac{4-\sqrt{168}}{2} \quad \text{ou} \quad x=\dfrac{4-\sqrt{168}}{2}\\ y=0\end{cases}$$

$$\iff \begin{cases}x=2-\sqrt{42} \quad \text{ou} \quad x=2+\sqrt{32}\\ y=0\end{cases}$$



Deux points de $\mathscr{C}$ ont donc une ordonnée nulle : $M_1\left(2-\sqrt{42}\,;\,0\right)$ et $M_2\left(2+\sqrt{42}\,;\,0\right)$.

▷ **Exercice 6.** Dans un repère orthonormé $\left(O,\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ du plan, on considère les points $A(\,-3\,;\,2\,)$, $B(\,5\,;\,4\,)$ et $C(\,3\,;\,-4\,)$.

1. Déterminer une équation de la médiatrice (Δ) de [AB] et une équation de la médiatrice (Δ') de [BC].

- (Δ) est la perpendiculaire à (AB) passant par le milieu I de [AB] : $I\left(\dfrac{x_A+x_B}{2}\,;\,\dfrac{y_A+y_B}{2}\right)(\,1\,;\,3\,)$.

  $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}8\\2\end{pmatrix}$ est un vecteur normal de (Δ) d'où $(\Delta) : 8x+2y+c=0$.

  $I(\,1\,;\,3\,)\in(\Delta) \iff 8\times1+2\times3+c=0 \iff c=-14$ donc $(\Delta) : 8x+2y-14=0 \iff 4x+y-7=0$.
- On obtient de même, avec $J(\,4\,;\,0\,)$ milieu de [BC] : $(\Delta') : x+4y-4=0$.

2. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

Le centre Ω du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices, donc le point d'intersection des droites (Δ) et (Δ'). Ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}4x+y-7=0\\ x+4y-4=0\end{cases} \iff \begin{cases}4x+y-7=0\\ x=-4y+4\end{cases} \iff \begin{cases}4(-4y+4)+y-7=0\\ x=-4y+4\end{cases} \iff \begin{cases}y=\frac{3}{5}\\ x=-4\times\frac{3}{5}+4=\frac{8}{5}\end{cases} \quad \text{donc } \Omega\left(\frac{8}{5}\,;\,\frac{3}{5}\right)$$

3. Déterminer une équation de ce cercle.

Le cercle Γ circonscrit au triangle ABC a pour rayon $\Omega A = \Omega B = \Omega B$.

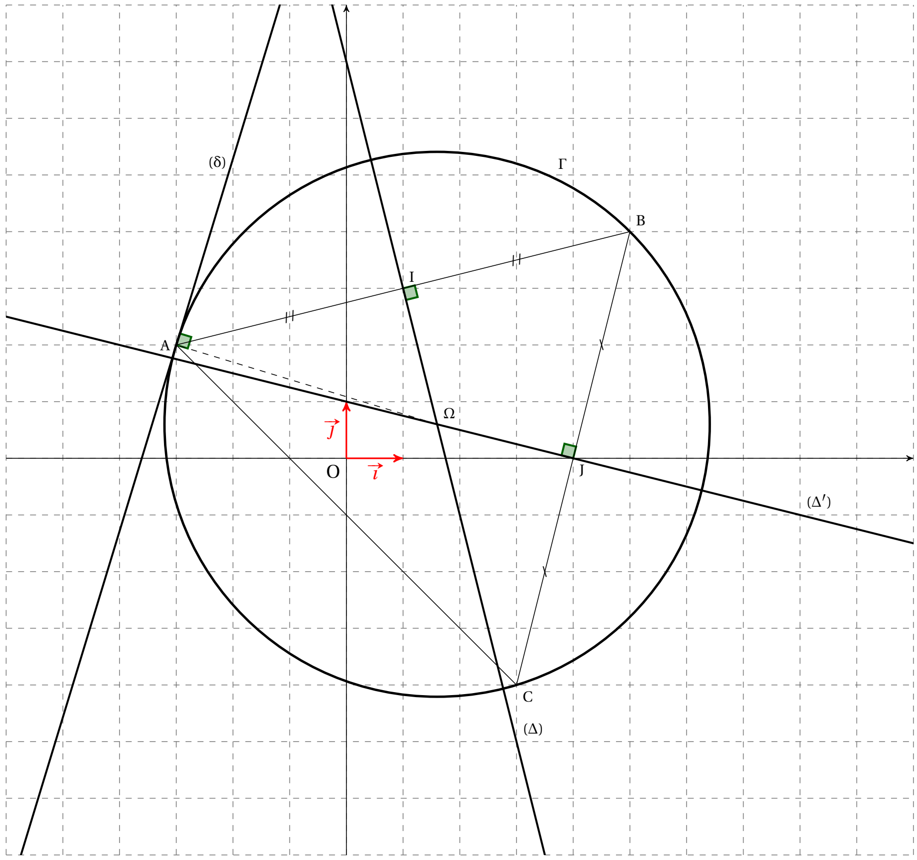
On a $\Omega A = \sqrt{(x_A-x_\Omega)^2+(y_A-y_\Omega)^2} = \sqrt{\left(-3-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(2-\dfrac{3}{5}\right)^2} = \sqrt{\dfrac{578}{25}} = \dfrac{17\sqrt{2}}{5}$.

On en déduit : $\Gamma : (x-x_\Omega)^2+\left(y-y_\Omega\right)^2 = \dfrac{578}{25} \iff \left(x-\dfrac{8}{5}\right)^2+\left(y-\dfrac{3}{5}\right)^2=\dfrac{578}{25}$

4. Déterminer une équation de la tangente à ce cercle en A.

La tangente (δ) à Γ au point A est la perpendiculaire en A à la droite (ΩA) donc $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-\frac{23}{5}\\ \frac{7}{5}\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (δ) et $5\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-23\\7\end{pmatrix}$ en est un autre.

Ainsi $(\delta) : -23x+7y+c=0$ mais $A(\,-3\,;\,2\,)\in(\delta) \iff -23\times(-3)+7\times2+c=0 \iff c=-83$ d'où $(\delta) : -23x+7y-83=0$.



▷ **Exercice 7.** Dans un repère orthonormé $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points A(−3 ; 2), B(1 ; 5) et C(1 ; −1).

1. Montrer que le triangle ABC est isocèle.

   On calcule facilement $\begin{cases} AB = 5 \\ AC = 5 \end{cases}$ ainsi ABC est isocèle en A.

2. Déterminer l'équation cartésienne du cercle $\mathscr{C}$ de centre A passant par B.

   $\mathscr{C}$ a pour rayon AB = 5 donc $\mathscr{C} : (x+3)^2 + (y-2)^2 = 25$.

3. Déterminer une équation de la tangente (T) à $\mathscr{C}$ en B.

   (T) a pour vecteur normal $\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}$ donc (T) : $4x+3y+c=0$ or $B(1\,;5) \in \mathscr{C} \iff 4\times 1 + 3\times 5 + c = 0 \iff c = -19$

   d'où (T) : $4x+3y-19=0$.

4. Le cercle $\mathscr{C}$ coupe l'axe des ordonnées en I et J. La tangente (T) coupe l'axe des ordonnées en K. Calculer les coordonnées des points I, J et K et montrer que $KI \times KJ = KB^2$

5. a) Déterminer l'équation cartésienne du cercle Γ de diamètre [AC].

   Le cercle Γ de diamètre [AC] a pour centre le milieu I de [AC] et pour rayon $r = \frac{1}{2}AC$.

   - $I\left(\frac{x_A+x_C}{2}\,;\frac{y_A+y_C}{2}\right)\left(-1\,;\frac{1}{2}\right)$
   - $AC = \sqrt{(x_C-x_A)^2+(y_C-y_A)^2} = \sqrt{(1+3)^2+(-1-2)^2}$

   soit AC = 5 donc $r = \frac{5}{2}$.

   Ainsi $\Gamma : (x+1)^2 + \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$

   b) Vérifier que Γ passe par le milieu A′ de [BC]. Pouvait-on prévoir ce résultat ?

   On a $A'\left(\frac{x_B+x_C}{2}\,;\frac{y_B+y_C}{2}\right)(1\,;2)$.

   Pour $x=1$ et $y=2$, $(x+1)^2 + \left(x-\frac{1}{2}\right)^2 = (1+1)^2 + \left(2-\frac{1}{2}\right)^2 = 4 + \frac{9}{4} = \frac{25}{4}$ donc $A' \in \Gamma$.

   On sait que ABC est isocèle en A donc la médiane (AA′) est aussi une hauteur et le triangle AA′C est rectangle en A′. Son cercle circonscrit est donc le cercle de diamètre [AC], c'est à dire Γ. Le résultat précédent s'explique donc géométriquement.

6. On considère l'ensemble $\mathscr{E}$ des points M(x ; y) du plan vérifiant $MB^2 + MC^2 = 50$.

a) Exprimer MB^2 et MC^2 en fonction de x et y.
$MB^2 = (x_B - x_M)^2 + (y_B - y_M)^2 = (1-x)^2 + (5-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26$
et $MC^2 = (x_C - x_M)^2 + (y_C - y_M)^2 = (1-x)^2 + (-1-y)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2$

b) Montrer que $\mathscr{E}$ est un cercle dont on déterminera les éléments caractéristiques.

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} MB^2 + MC^2 = 50 &\iff x^2 + y^2 - 2x - 10y + 26 + x^2 + y^2 - 2x + 2y + 2 = 50 \\ &\iff 2x^2 + 2y^2 - 4x - 8y = 22 \\ &\iff x^2 + y^2 - 2x - 4y = 11 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 - 1 - 4 = 11 \\ &\iff (x-1)^2 + (y-2)^2 = 4^2 \end{aligned}$$

donc $\mathscr{E}$ est le cercle de centre A′ et de rayon 4.

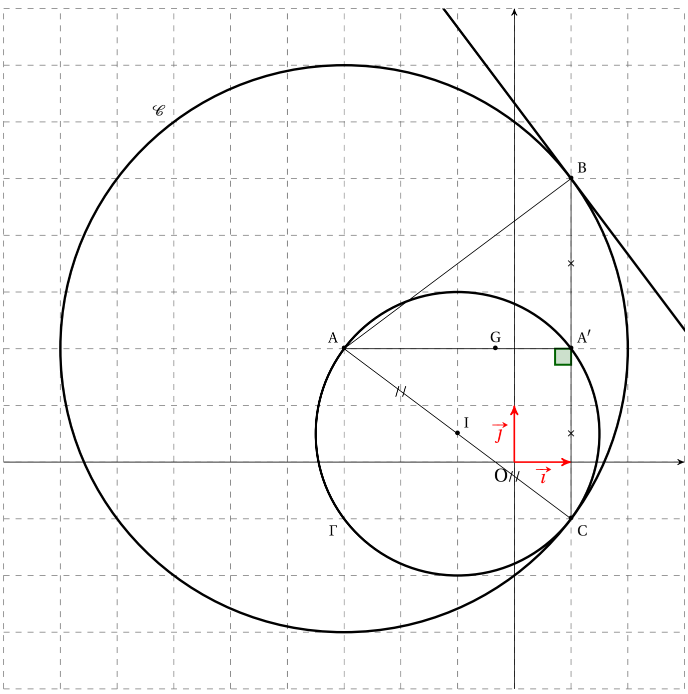
Méthode 2 : D'après la formule de la médiane, $MB^2 + MC^2 = 2MA'^2 + \dfrac{BC^2}{4}$ ainsi,

$$\begin{aligned} M \in \mathscr{E} &\iff MB^2 + MC^2 = 50 \\ &\iff 2MA'^2 + \frac{BC^2}{2} = 50 \qquad \text{avec} \quad BC^2 = (x_C - x_B)^2 + (y_C - y_B)^2 = 36 \\ &\iff MA'^2 = 16 \\ &\iff MA' = 4 \\ &\iff \text{M appartient au cercle de centre A' et de rayon 4.} \end{aligned}$$

7. Calculer les coordonnées du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.
Le centre de gravité G(x ; y) du triangle ABC est situé aux deux tiers de la médiane [AA′] en partant du sommet A. On a donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AA'} \iff \begin{cases} x + 3 = \frac{2}{3}(1+3) \\ y - 2 = \frac{2}{3}(2-2) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = 2 \end{cases}$$

donc $G\left(-\dfrac{1}{3} ; 2\right)$



▷ **Exercice 8.** Dans le plan rapporté à un repère orthonormal, quel est le périmètre du cercle d'équation $x^2+y^2+14x-10y+48=0$?

$x^2+y^2+14x-10y+48=0 \iff (x+7)^2-49+(y-5)^2-25+48=0 \iff (x+7)^2+(y-5)^2=26$ donc il s'agit du cercle de centre $\Omega(-7\,;\,5)$ et de rayon $r=\sqrt{26}$. Son périmètre est $\mathscr{P}=2\pi r=2\pi\sqrt{26}$.

▷ **Exercice 9.** Dans le plan muni d'un repère orthonormé $\left(\text{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath}\right)$, on considère les points $\text{A}(-3\,;\,3)$, $\text{B}(5\,;\,7)$, $\text{C}(6\,;\,0)$, et I le milieu du segment [AB]. (*on pourra s'aider d'une figure*)

1. Calculer $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$.

$\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{\text{AC}}\begin{pmatrix}9\\-3\end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=8\times 9-4\times 3=60$

2. Calculer les longueurs AB et AC puis en utilisant une autre écriture de $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}$, déterminer une mesure au degré près de l'angle $\widehat{\text{BAC}}$.

$\text{AB}=\sqrt{8^2+4^2}=4\sqrt{5}$ et $\text{AC}=\sqrt{9^2+(-3)^2}=3\sqrt{10}$.

D'une part, $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=60$ et d'autre part, $\overrightarrow{\text{AB}}\cdot\overrightarrow{\text{AC}}=\text{AB}\times\text{AC}\times\cos\widehat{\text{BAC}}=60\sqrt{2}\cos\widehat{\text{BAC}}$ donc on peut en déduire :

$60\sqrt{2}\cos\widehat{\text{BAC}}=60$ soit $\cos\widehat{\text{BAC}}=\dfrac{60}{60\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'où $\widehat{\text{BAC}}=45°$.

3. Calculer l'aire du triangle ABC.

$aire(\text{ABC})=\dfrac{1}{2}\text{AB}\times\text{AC}\times\sin\widehat{\text{BAC}}=\dfrac{1}{2}\times 4\sqrt{5}\times 3\sqrt{10}\times\sin 45°=30\sqrt{2}\times\dfrac{\sqrt{2}}{2}=30$.

4. Déterminer les coordonnées du point I.

$\text{I}\left(\dfrac{x_\text{A}+x_\text{B}}{2}\,;\,\dfrac{y_\text{A}+y_\text{B}}{2}\right)$ soit $\text{I}(1\,;\,5)$.

5. Démontrer qu'une équation de la droite (Δ), médiatrice du segment [AB] est $2x+y=7$.

La médiatrice de segment [AB] est la perpendiculaire à (AB) passant par I. Un vecteur normal de (Δ) est donc $\overrightarrow{\text{AB}}\begin{pmatrix}8\\4\end{pmatrix}$.

Ainsi $(\Delta): 8x+4y+c=0$ mais $\text{I}(1\,;\,5)\in(\Delta) \iff 8\times 1+4\times 5+c=0 \iff c=-28$ d'où $(\Delta): 8x+4y-28=0 \iff 2x+y=7$.

6. On admet qu'une équation de la médiatrice (Δ') du segment [AC] est $3x-y=3$. En déduire les coordonnées du centre du cercle circonscrit Γ au triangle ABC.

Le centre du cercle circonscrit est le point de concours des médiatrices donc ses coordonnées vérifient le système :

$$\begin{cases}2x+y=7\\3x-y=3\end{cases} \iff \begin{cases}2x+y=7\\y=3x-3\end{cases} \iff \begin{cases}2x+3x-3=7\\y=3x-3\end{cases} \iff \begin{cases}x=2\\y=3\times 2-3=3\end{cases} \quad \text{d'où } \Omega(2\,;\,3).$$

7. Donner une équation cartésienne de Γ.

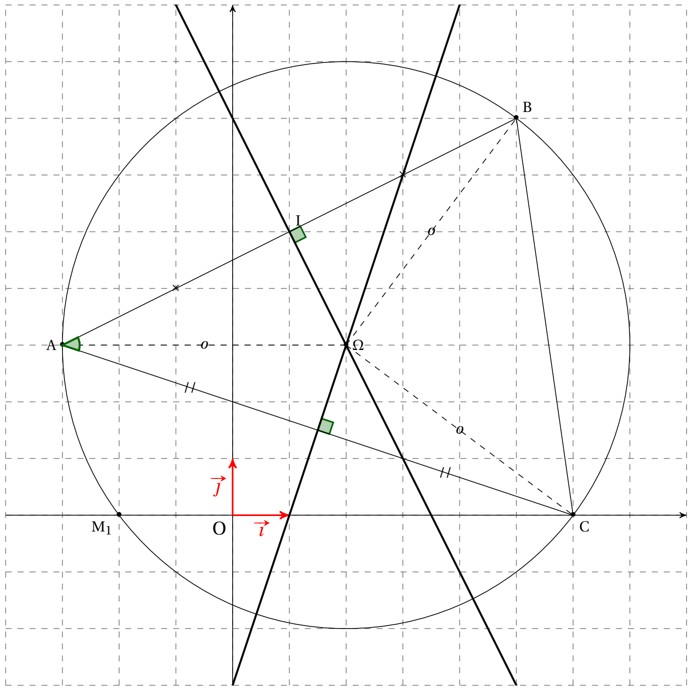
Le rayon de Γ est $r=\Omega\text{A}=\Omega\text{B}=\Omega\text{C}$. On calcule facilement $\Omega\text{A}=5$ donc $r=5$. Une équation cartésienne est alors : $(x-2)^2+(y-3)^2=5^2$.

8. Démontrer que Γ et l'axe des abscisses ont deux point d'intersection dont on précisera les coordonnées.

Un point $\text{M}(x\,;\,y)$ appartient à Γ et à l'axe des abscisses si ses coordonnées vérifient :

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y-3)^2=25\\y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x^2-4x-12=0 \quad (\Delta=64)\\y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=\dfrac{4-\sqrt{64}}{2} \quad \text{ou} \quad \dfrac{4+\sqrt{64}}{2}\\y=0\end{cases} \iff \begin{cases}x=-2 \quad \text{ou} \quad x=6\\y=0\end{cases}$$

Γ et l'axe $(\text{O}x)$ ont donc deux points d'intersection : $\text{M}_1(-2\,;\,0)$ et $\text{C}(6\,;\,0)$.



▷ **Exercice 10.** Soit ABCD un parallélogramme de centre O tel que AB = 5, AD = 4 et BD = 7.

1. Donner la mesure de l'angle $\widehat{BAD}$ arrondie au degré.

   D'après la formule d'Al-Kashi :

   $BD^2 = AB^2 + AD^2 - 2AB \times AD \times \cos\widehat{BAD}$

   $\iff 49 = 25 + 16 - 2 \times 5 \times 4 \times \cos\widehat{BAD} \iff \cos\widehat{BAD} = -\dfrac{8}{40}$

   d'où $\widehat{BAD} \approx 102°$.

2. Calculer la longueur AC.

   D'après ce qui précède, $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{BAD} \approx 78°$ d'où :

   $$\begin{aligned} AC^2 &= BA^2 + BC^2 - 2BA \times BD \times \cos\widehat{ABC} \\ &= 5^2 + 4^2 - 2 \times 5 \times 4 \cos\widehat{ABC} \\ &\approx 32,68 \end{aligned}$$

   $AC \approx 5,7$

3. Donner la mesure de l'angle $\widehat{CAB}$ arrondie au degré.

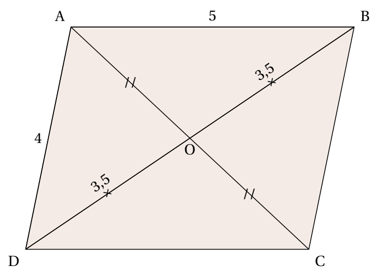
   $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos\widehat{CAB}$

   $\iff \cos\widehat{CAB} = \dfrac{AB^2 + AC^2 - BC^2}{2AB \times AC}$ soit $\cos\widehat{CAB} \approx 0,728$

   d'où $\widehat{CAB} \approx 43°$.

4. Calculer $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC}$.

   $\overrightarrow{BA} \cdot \overrightarrow{BC} = BA \times BC \times \cos\widehat{ABC} \approx 4,16$



▷ **Exercice 11.** On considère un cercle $\mathscr{C}$ de centre O et de rayon 3. Soient [AB] et [AC] deux cordes de $\mathscr{C}$ telles que AB = 3 et $\widehat{BAC} = 80°$, C appartenant au grand arc $\overset{\frown}{AB}$.

1. Quelle est la nature du triangle OAB ? En déduire la mesure de l'angle $\widehat{OAC}$, puis la valeur approchée au centième de la longueur AC.

   [OA] et [OB] sont deux rayons du cercle $\mathscr{C}$ de rayon 3 donc OA = OB = 3. De plus, AB = 3 donc OAB est équilatéral.

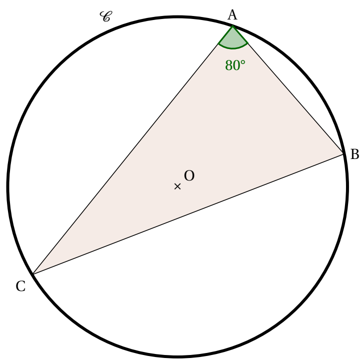
   On peut en déduire que $\widehat{OAB} = 60°$ donc que $\widehat{OAC} = 20°$. Ainsi dans le triangle OAC isocèle en O, $\widehat{AOC} = 180 - 2 \times 20 = 140°$ et $AC^2 = OA^2 + OC^2 - 2OA \times OC \cos AOC = 18 - 18\cos 140°$.

   Soit finalement, $AC = \sqrt{9 - 18\cos 140°} \approx 5,64$

2. En déduire la valeur approchée au centième de l'aire du triangle ABC.

   $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} AB \times AC \times \sin\widehat{BAC}$

   donc $aire(ABC) = \dfrac{1}{2} \times 3 \times \sqrt{9 - 18\cos 140°} \sin 80° \approx 8,33$



▷ **Exercice 12.** Dans un repère orthonormé, on considère le cercle $\mathscr{C}$ d'équation $x^2+y^2-6x-4y-4=0$.

1. Déterminer les coordonnées du centre Ω de $\mathscr{C}$ ainsi que son rayon.
   $x^2+y^2-6x-4y-4=0 \iff (x-3)^2-9+(y-2)^2-4-4=0 \iff (x-3)^2+(y-2)^2=17$ donc $\mathscr{C}$ est le cercle de centre $\Omega(3\,;\,2)$ et de rayon $\sqrt{17}$.

2. Vérifier que le point $A(-1\,;\,1)$ appartient à $\mathscr{C}$.
   Pour $x=-1$ et $y=1$, $(x-3)^2+(y-2)^2=(-1-3)^2+(1-2)^2=16+1=17$ donc $A\in\mathscr{C}$.

3. Déterminer une équation cartésienne de la tangente (T_A) à $\mathscr{C}$ au point A.
   La tangente (T_A) à $\mathscr{C}$ au point A est la perpendiculaire à (ΩA) passant par A. Ainsi $\overrightarrow{\Omega A}\begin{pmatrix}-4\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur normal à (T_A) qui a donc une équation de la forme : $(T_A) : -4x-y+c=0$.
   Par ailleurs, $A(-1\,;\,1)\in\mathscr{C} \iff -4\times(-1)-1+c=0 \iff c=-3$ donc $(T_A) : -4x-y-3=0 \iff 4x+y+3=0$.

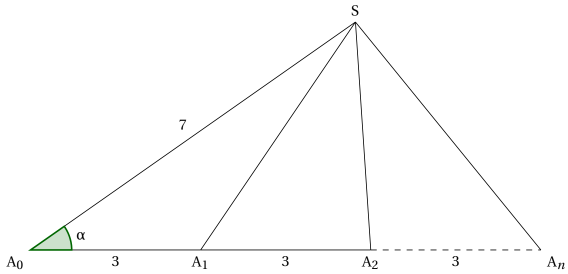
4. Soit $\mathscr{D}$ la droite d'équation $x-y=4$. Déterminer une équation du cercle $\mathscr{C}'$ de centre Ω tel que $\mathscr{D}$ soit tangente à $\mathscr{C}'$.
   Si $\mathscr{D}$ de vecteur directeur $\vec{u}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ est tangente à $\mathscr{C}'$ en un point $M(x\,;\,y)$ alors $\begin{cases}\overrightarrow{\Omega M}\cdot\vec{u}=0\\ x-y=4\end{cases}$:

   $$\begin{cases}\overrightarrow{\Omega M}\cdot\vec{u}=0\\ x-y=4\end{cases} \iff \begin{cases}(x-3)\times1+(y-2)\times1=0\\ x-y=4\end{cases} \iff \begin{cases}x-3+x-4-2=0\\ y=x-4\end{cases} \iff \begin{cases}x=\frac{9}{2}\\ y=\frac{9}{2}-4=\frac{1}{2}\end{cases} \quad \text{donc } M\left(\frac{9}{2}\,;\,\frac{1}{2}\right)$$

   Le rayon du cercle $\mathscr{C}'$ est alors $\Omega M=\sqrt{\left(\frac{9}{2}-3\right)^2+\left(\frac{1}{2}-2\right)^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3\sqrt{2}}{2}$ donc une équation de $\mathscr{C}'$ est :

   $\mathscr{C}' : (x-3)^2+(y-2)^2=\dfrac{9}{2}$

▷ **Exercice 13.** On construit $n+1$ points alignés $A_0, A_1, \dots, A_n$ tels que $A_kA_{k+1}=3$.
S est le point tel que $A_0S=7$ et $\widehat{A_1A_0S}=\alpha$ avec $\alpha\in\left[0\,;\,\frac{\pi}{2}\right]$.



1. Justifier que ${SA_2}^2=2{SA_1}^2-31$
   D'après le théorème de la médiane dans le triangle SA_0A_2, on a :
   $${SA_0}^2+{SA_2}^2=2{SA_1}^2+\frac{{A_0A_2}^2}{2} \iff 49+{SA_2}^2=2{SA_1}^2+18 \iff {SA_2}^2=2{SA_1}^2-31$$

2. Justifier que ${SA_1}^2=58-42\cos\alpha$, puis en déduire SA_1 et SA_2.
   D'après la formule d'Al-Kashi dans le triangle SA_0A_1,
   $$\begin{aligned}{SA_1}^2&={SA_0}^2+{A_1A_0}^2-2\times SA_0\times A_0A_1\times\cos\alpha\\&=49+9-42\cos\alpha\\&=58-42\cos\alpha\end{aligned}$$
   d'où $SA_1=\sqrt{58-42\cos\alpha}$ et ${SA_2}^2=2(58-42\cos\alpha)-31$ soit $SA_2=\sqrt{85-84\cos\alpha}$

3. On définie la suite (u_n) par $u_0=7$, $u_1=\sqrt{58-42\cos\alpha}$ et pour tout entier naturel n, $u_n=SA_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+2}=\sqrt{2u_{n+1}^2-{u_n}^2+18}$.
   D'après le théorème de la médiane dans le triangle SA_nA_{n+2} :
   $${SA_n}^2+{SA_{n+2}}^2=2{SA_{n+1}}^2+\frac{{A_nA_{n+2}}^2}{2} \text{ donc } {SA_{n+2}}^2=2{SA_{n+1}}^2+18-{SA_n}^2 \text{ d'où } SA_{n+2}=\sqrt{2{SA_{n+1}}^2-{SA_n}^2+18}$$
   soit $u_{n+2}=\sqrt{2{u_{n+1}}^2-{u_n}^2+18}$.

4. Proposer un algorithme en Python ou en langage TI qui permet d'afficher la valeur de u_{50}.

```python
from math import*
def f(alpha):
    u=7
    v=sqrt(58-42*cos(alpha))
    for i in range(49):
        w=sqrt(2*v*v-u*u+18)
        u=v
        v=w
    return w
```

La saisie de $f(\pi/3)$ renvoie 146.62537297480264.

```
NORMAL FLOTT AUTO RÉEL DEGRÉ MP
ÉDIT MENU: [alpha] [f5]
PROGRAM:REC
:Input "ANGLE=",A
:7→U
:√(58-42cos(A))→V
:For(I,1,49)
:√(2V^2-U^2+18)→W
:V→U
:W→V
:End
:Disp W
```

Pour A = 60 (calculatrice en mode degrés), le résultat affiché est 146,625373.

▷ **Exercice 14.** On considère deux points A et B tels que AB = 7 cm. Combien existe-t-il de de points C tels que le triangle ABC soit un triangle rectangle d'aire 10 cm^2.

- Supposons que ABC est rectangle en A. Le point C est alors sur la perpendiculaire (Δ_A) en (A) à ABC.

  $aire(\text{ABC}) = 10 \iff \dfrac{\text{AB} \times \text{AC}}{2} = 10 \iff \text{AC} = \dfrac{20}{7}$ et il y a deux positions possibles de C sur (Δ_A).
- Par un raisonnement analogue, il existe deux positions de C si ABC est rectangle en B.
- Supposons maintenant que ABC est rectangle en C. On a alors $\overrightarrow{\text{CA}} \cdot \overrightarrow{\text{CB}} = 0$ donc le point C est situé sur le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [AB]. Soit H le projeté orthogonal de C sur (AB). $aire(\text{ABC}) = \dfrac{1}{2}\text{AB} \times \text{CH}$ donc $\dfrac{1}{2} \times 7 \times \text{CH} = 10$ soit $\text{CH} = \dfrac{20}{7}$. Ainsi C se situe sur une droite parallèle à (AB) telle que $\text{CH} = \dfrac{20}{7}$ et aussi sur le cercle de diamètre [AB] et de rayon $\dfrac{7}{2} > \dfrac{20}{7}$. Il y a deux droites possibles et pour chacune d'elle deux intersections avec le cercle. Il y a donc 4 positions possibles pour C.

Il y a donc au total 8 possibilités pour C.