Lois à densité : corrections des exercices de 9 à 12

▷ **Exercice 9.** Une entreprise d'autocars dessert une région montagneuse. En chemin, les véhicules peuvent être bloqués par des incidents extérieurs comme des chutes de pierres, la présence de troupeaux sur la route, etc.

Un autocar part de son entrepôt. On note D la variable aléatoire qui mesure la distance en kilomètres que l'autocar va parcourir jusqu'à ce qu'il survienne un incident. On admet que D suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = \frac{1}{82}$, appelée aussi loi de durée de vie sans vieillissement. Dans tout l'exercice, les résultats numériques seront arrondis au millième.

1. Calculer la probabilité que la distance parcourue sans incident soit :

a) comprise entre 50 et 100 km;
$P(50 \leqslant D \leqslant 100) = e^{-\frac{1}{82}\times 50} - e^{-\frac{1}{82}\times 100} = e^{-\frac{25}{41}} - e^{-\frac{50}{41}} \approx 0{,}248$

b) supérieure à 300 km.
$P(D \geqslant 300) = e^{-\frac{1}{82}\times 300} = e^{-\frac{150}{41}} \approx 0{,}026$

2. Sachant que l'autocar a déjà parcouru 350 kilomètres sans incident, quelle est la probabilité qu'il n'en subisse pas non plus au cours des 25 prochains kilomètres?

$P_{D\geqslant 350}(D \geqslant 350+25) = P(D \geqslant 25)$ car la loi exponentielle est sans vieillissement.

Ainsi $P_{D\geqslant 350}(D \geqslant 350+25) = e^{-\frac{1}{82}\times 25} \approx 0{,}737$

▷ **Exercice 10.**

1. La durée de vie, exprimée en années, d'un moteur pour automatiser un portail fabriqué par une entreprise A est une variable aléatoire X qui suit une loi exponentielle de paramètre λ, où λ est un réel strictement positif. On sait que $P(X \leqslant 2) = 0{,}15$. Déterminer la valeur exacte du réel λ.

$P(X \leqslant 2) = 0{,}15 \iff 1 - e^{-\lambda\times 2} = 0{,}15 \iff e^{-2\lambda} = 0{,}85 \iff -2\lambda = \ln(0{,}85) \iff \lambda = -\frac{1}{2}\ln(0{,}85)$

Dans la suite de l'exercice on prendra 0,081 pour valeur de λ.

2. a) Déterminer $P(X \geqslant 3)$.
$P(X \geqslant 3) = e^{-0{,}081\times 3} \approx 0{,}784$

b) Montrer que pour tous réels positifs t et h, $P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)$.
$$P_{X\geqslant t}(X \geqslant t+h) = \frac{P(X \geqslant t+h \quad \text{ET} \quad X \geqslant t)}{P(X \geqslant t)} = \frac{P(X \geqslant t+h)}{P(X \geqslant t)} = \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}} = \frac{e^{-\lambda t}\times e^{-\lambda h}}{e^{-\lambda t}} = e^{-\lambda h} = P(X \geqslant h)$$

c) Le moteur a déjà fonctionné durant 3 ans. Quelle est la probabilité pour qu'il fonctionne encore 2 ans?
$P_{X\geqslant 3}(X \geqslant 3+2) = P(X \geqslant 2) = e^{-0{,}081\times 2} \approx 0{,}850$

d) Calculer l'espérance de la variable aléatoire X et donner une interprétation de ce résultat.
$E(X) = \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{0{,}081} = 12{,}346$ donc la durée de vie moyenne d'un moteur est de 12 ans environ.

▷ **Exercice 11.** Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à 0,12.

Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin. On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation?

Notons X la variable aléatoire qui compte le nombre de moteurs tombant en panne durant la première année d'utilisation parmi les 20 moteurs achetés.

On assimile ce choix à la répétition 20 fois dans des conditions identiques et indépendantes de la même épreuve de Bernoulli de paramètre $p = 0{,}12$. La variable aléatoire X suit donc la loi binomiale $\mathscr{B}(20; 0{,}12)$.

On calcule donc $p(X=2) = \binom{20}{2} \times 0{,}12^2 \times 0{,}88^{18} \approx 0{,}274$

2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation?

$p(\mathrm{X} \geqslant 1) = 1 - p(\mathrm{X} = 0) = 1 - \binom{20}{0} \times 0,12^0 \times 0,88^{20} = 1 - 0,88^{20} \approx 0,922$

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(\mathrm{Y} \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.

$p(\mathrm{Y} \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 1} = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda}$

donc $p(\mathrm{Y} \leqslant 1) = 0,12 \Longleftrightarrow 1 - \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,12 \Longleftrightarrow \mathrm{e}^{-\lambda} = 0,88 \Longleftrightarrow -\lambda = \ln(0,88) \Longleftrightarrow \lambda = -\ln(0,88) \approx 0,128$

Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.

2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans?

$p(\mathrm{Y} \geqslant 3) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 3} = \mathrm{e}^{-0,128 \times 3} \approx 0,681$

3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an?

$p_{\mathrm{Y} \geqslant 1}(\mathrm{Y} \geqslant 4) = p_{\mathrm{Y} \geqslant 1}(\mathrm{Y} \geqslant 1+3) = p(\mathrm{Y} \geqslant 3)$ car la loi exponentielle est sans vieillissement.

D'où $p_{\mathrm{Y} \geqslant 1}(\mathrm{Y} \geqslant 4) \approx 0,681$

4. Calculer E(Y), puis interpréter le résultat.

$\mathrm{E(Y)} = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{0,128} \approx 7,812$ ce qui signifie qu'en moyenne, un moteur fonctionne normalement environ 7,8 années soit presque 7 années et 10 mois.

▷ **Exercice 12.** Soit X une variable aléatoire continue qui suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

Partie A

1. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 1)$, en donner une valeur exacte puis une valeur approchée à 10^{-3} près par excès.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \leqslant 1) = 1 - \mathrm{e}^{-\lambda \times 1} = 1 - \mathrm{e}^{-1,5} \approx 0,777$

2. Calculer $\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2)$.

$\mathrm{P}(\mathrm{X} \geqslant 2) = \mathrm{e}^{-\lambda \times 2} = \mathrm{e}^{-3} \approx 0,050$

3. Déterminer $\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2)$ à 10^{-3} près.

$\mathrm{P}(1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2) = \mathrm{e}^{-1,5 \times 1} - \mathrm{e}^{-1,5 \times 2} \approx 0,173$

4. Quelle est l'espérance mathématique de X?

$\mathrm{E(X)} = \dfrac{1}{\lambda} = \dfrac{1}{1,5} = \dfrac{2}{3}$

Partie B : Une machine outil fabrique des cylindres. On mesure l'écart, en dixièmes de millimètres, entre le diamètre des cylindres et la valeur de réglage de la machine. On suppose que cet écart suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda = 1,5$.

Si l'écart est inférieur à 1, le cylindre est accepté. Si l'écart est compris entre 1 et 2, on procède à une rectification qui permet d'accepter le cylindre dans 80 % des cas. Si l'écart est supérieur à 2, le cylindre est refusé.

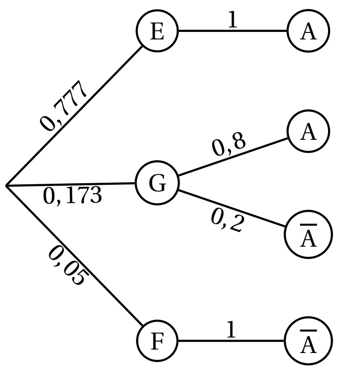
1. On prélève au hasard un cylindre dans la production.

   a) Montrer que la probabilité qu'il soit accepté est égale à 0,915 à 10^{-3} près.

   Notons :

   - E l'événement « $\mathrm{X} \leqslant 1$ »
   - F l'événement « $\mathrm{X} \geqslant 2$ »
   - G l'événement « $1 \leqslant \mathrm{X} \leqslant 2$ »
   - A l'événement « le cylindre est accepté »

   Les probabilités de E, F et G ont été calculées précédemment. On en déduit l'arbre de probabilité suivant :



E, F et G constituent une partition de l'univers donc d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(A) &= P(E\cap A)+P(G\cap A)+P(F\cap A)\\ &= P(E)\times P_E(A)+P(G)\times P_G(A)+P(F)\times P_F(A)\\ &= 0,777\times 1+0,173\times 0,8+0,05\times 0\\ &\approx 0,915 \end{aligned}$$

b) Sachant qu'il est accepté, quelle est la probabilité qu'il ait subi une rectification ? $P_A(F)=\dfrac{P(A\cap F)}{P(A)}=\dfrac{0,173\times 0,8}{0,9154}\approx 0,151$

2. On prélève de manière indépendante dix cylindres de la production. On suppose que le nombre de cylindres suffisamment important pour assimiler ce tirage à un tirage successif avec remise.

a) Quelle est la probabilité que les dix cylindres soient acceptés ?
On répète 10 fois dans des conditions identiques et indépendantes la même épreuve de Bernouilli de paramètre 0,915 donc la variable aléatoire X qui compte le nombre de cylindres acceptés suit la loi binomiale $\mathscr{B}(10;0,915)$.
$P(X=10)=\dbinom{10}{10}\times 0,915^{10}\times 0,085^{0}=0,915^{10}=0,411$

b) Quelle est la probabilité qu'au moins un cylindre soit refusé ?
Au moins un cylindre est refusé si le nombre de cylindres acceptés est inférieur ou égal à 9 :
$P(X\leq 9)=1-P(X=10)=1-\dbinom{10}{10}\times 0,915^{10}\times 0,085^{0}=1-0,915^{10}\approx 0,589$