Similitudes planes

I Transformations du plan

Définition

On dit qu'une application f du plan dans lui-même est une transformation si f est une bijection du plan dans lui-même, c'est-à-dire si pour tout point N du plan, il existe un et un seul point M du plan tel que $f(\text{M}) = \text{N}$.

Exemple

Une translation, une homothétie, une rotation, une réflexion sont des transformations du plan.
L'application identique ou identité, notée id (c'est-à-dire l'application qui à un point M associe M lui-même) est une transformation du plan.

Exercice 01 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan une droite D.
Soit p la projection sur D c'est-à-dire l'application qui à tout point M du plan associe le point m, intersection de la droite D et de la droite passant par M et perpendiculaire à D.
p est-elle une transformation du plan ?

Exercice 02 (voir réponses et correction)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O};\vec{u},\vec{v})$.

1°) L'application f qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = 3iz + 4$ est-elle une transformation du plan ?

2°) L'application g qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = z^2 - 3i$ est-elle une transformation du plan ?

Propriété

(voir démonstration 01)

- Soit f une transformation du plan. L'application du plan dans lui même qui à tout point N associe l'unique point M tel que $f(\text{M}) = \text{N}$ est aussi une transformation du plan.
Elle est appelée transformation réciproque de f et notée f^{-1}. On a alors $f(\text{M}) = \text{N} \Leftrightarrow \text{M} = f^{-1}$ i

II Définition - Propriétés

Exercice 04 (voir réponses et correction)

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
On considère l'application f qui au point M d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = (1+i)\overline{z} + i$

1°) Soient A, B et C les points d'affixes respectives $a = 1 + i$; $b = 2 - i$; $c = -1 - 2i$.
Déterminer les affixes des points A', B' et C', images de A, B et C par f.
Démontrer que A'B'C' est un triangle semblable au triangle ABC.

2°) On considère quatre points M, N, P, Q (M $\neq$ N et P $\neq$ Q) dont les images par f sont notées M', N', P', Q'
Démontrer que $\dfrac{M'N'}{P'Q'} = \dfrac{MN}{PQ}$.
On dit que f conserve les rapports de distance.

Définition

On appelle similitude du plan, toute transformation f du plan conservant les rapports de distances, c'est-à-dire une transformation du plan pour laquelle :
pour tous points M, N, P, Q (M $\neq$ N et P $\neq$ Q) dont les images par f sont notées M', N', P', Q', on a :
$\dfrac{M'N'}{P'Q'} = \dfrac{MN}{PQ}$.

Propriété (voir démonstration 02)

Soit f une transformation du plan.
f est une similitude si et seulement si il existe un réel k strictement positif tel que f multiplie les distances par k, c'est-à-dire : pour tous points M et N dont les images par f sont notées M' et N', on a : M'N' = k MN
On dit que k est le rapport de la similitude f.

Exercice 05 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. Ω est un point du plan d'affixe ω.
Pour tout point M , on considère le point M_1 image de M par la rotation de centre Ω et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.
On appelle M' le milieu de $[MM_1]$.
Soit f l'application qui à M fait correspondre le point M'.
Déterminer l'écriture complexe de f .
Démontrer que f est une similitude et donner son rapport.

Exercice 06 (voir réponses et correction)

On considère une homothétie h de rapport k.
Démontrer que h est une similitude. Quel est le rapport de la similitude h.

Exercice 07 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
1°) Soit f l'application ayant pour écriture complexe $z' = 1 - i\,\overline{z}$. f est-elle une similitude ?
2°) Soit g l'application ayant pour écriture complexe $z' = z + 2\overline{z}$. g est-elle une similitude ?

Propriété (voir démonstration 03)

Si f est une similitude de rapport k, alors sa réciproque est une similitude de rapport $k^{-1} = \dfrac{1}{k}$.

Si f est une similitude de rapport k et f' une similitude de rapport k', alors les composées $f \circ f'$ et $f' \circ f$ sont des similitudes de rapport kk'. (en général on a $f \circ f' \neq f' \circ f$)

Remarque

Une similitude de rapport 1 est une transformation du plan qui conserve les distances.

Définition

Une similitude de rapport 1, c'est-à-dire une transformation qui conserve les distances, est appelée isométrie.

Exemples

Les translations, les rotations, les symétries et leurs composées sont des isométries.
L'identité est une isométrie.
Une homothétie de rapport k est une similitude de rapport $|k|$, ce n'est pas en général une isométrie.

Propriété (voir démonstration 04)

- Une application du plan dans lui-même ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$ est une similitude de rapport $k = |a|$.
- Réciproquement, toute similitude a une écriture complexe de la forme $z' = az + b$ ou $z' = a\overline{z} + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

Propriété (voir démonstration 05)

Une simitude conserve les angles géométriques.
Une similitude transforme un triangle en un triangle semblable.
C'est-à-dire que si A, B et C sont trois points distincts et A', B' et C' leurs images par une similitude :
$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$; $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$; $\widehat{ACB} = \widehat{A'C'B'}$; les triangles ABC et A'B'C' sont semblables.

Exercice 08 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$, les points A, B, I, J et K d'affixes respectives $z_A = 4i$; $z_B = 2$; $z_I = 3$, $z_J = 1$, $z_K = 3 - i$.

1°) Démontrer que le triangle IJK est un triangle semblable au triangle OAB.

2°) Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = az + b$, par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?

3°) Existe-t-il une transformation d'écriture complexe $z' = a\overline{z} + b$, par laquelle le triangle OAB a pour image le triangle IJK ?

4°) On considère la rotation r de centre O et d'angle $-\frac{\pi}{2}$, l'homothétie h de centre B et de rapport $-\frac{1}{2}$ et la symétrie s d'axe $(O,\vec{u})$.
Construire les images de O, A et B par l'application $s \circ h \circ r$.
Donner l'écriture complexe de $s \circ h \circ r$.

Propriété (voir démonstration 06)

- Soient A, B et C trois points non alignés.
Si f est une similitude telle que $f(A) = A$, $f(B) = B$ et $f(C) = C$, alors f est l'application identique.
(Une similitude qui admet trois points fixes non alignés est l'application identique).
- Soient A et B deux points distincts.
Si f est une similitude telle que $f(A) = A$ et $f(B) = B$, alors f est l'application identique ou f est la symétrie axiale d'axe (AB).

Exercice 09 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$. On note D la droite d'équation $y = x$.
Soit r la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$, s la symétrie d'axe $(O,\vec{u})$ et s' la symétrie d'axe D.
Soit A le point d'affixe 1. Démontrer que les points O et A sont invariants par $s' \circ r$.
En déduire que $s' \circ s = r$.

III Similitudes directes

Remarque

On sait qu'une similitude conserve les angles géométriques.
Elle peut conserver les angles orientés ou les transformer en leur opposé.

Définition

On appelle similitude directe toute similitude conservant les angles orientés.

Propriété (voir démonstration 07)

Une application du plan dans lui-même est une similitude directe si et seulement si son écriture complexe est de la forme $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.
Le rapport de la similitude est alors $k = |a|$.

Exemples

L'identité, les translations, les rotations, les homothéties sont des similitudes directes.
Les symétries axiales sont des similitudes non directes (similitudes inverses).

Propriété (voir démonstration 08)

Soit f une similitude directe.
Il existe un réel θ tel que :

pour tous points distincts M et N du plan, $(\overrightarrow{MN}, \overrightarrow{f(M)f(N)}) = \theta \ [2\pi]$.
On dit que θ est l'angle de la similitude directe f.

Si f a pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$, alors $\theta = arg(a) \ [2\pi]$.

Remarque

Les translations et les homothéties de rapport positif ont pour angle $\theta = 0 \ [2\pi]$.
Les homothéties de rapport négatif ont pour angle $\theta = \pi \ [2\pi]$.
Une rotation d'angle θ a pour angle $\theta \ [2\pi]$.

Propriété (voir démonstration 09)

- Si f est une similitude directe de rapport k et d'angle θ, alors f^{-1} est une similitude directe de rapport $k^{-1} = \frac{1}{k}$ et d'angle $-\theta$.
- Si f et f' sont deux similitudes directes de rapports respectifs k et k' et d'angles respectifs θ et θ', alors la composée $f' \circ f$ est une similitude directe de rapport kk' et d'angle $\theta + \theta'$.
  (Il en est de même pour la composée $f \circ f'$)

Remarque

La conservation des angles orientés par une similitude directe et la transformation d'une angle orienté en son opposé par une similitude non directe (similitude inverse), font que :
La composée d'une similitude directe et d'une similitude inverse est une similitude inverse.
La composée de deux similitudes inverses est une similitude directe.

Propriété (voir démonstration 10)

Une similitude directe qui n'est pas une translation a un point invariant (point fixe) unique.
Ce point est appelé centre de la similitude.

Exercice 10 (voir réponses et correction)

Pour chacune des similitudes directes f, donner le rapport, l'angle et le centre éventuel.
1°) f d'écriture complexe $z' = -3z + 1 - 5i$.
2°) f d'écriture complexe $z' = (1 + i)z - i$.
3°) f d'écriture complexe $z' = z + 1 + i$.

Propriété (voir démonstration 11)

Soit f une similitude directe qui n'est pas une translation.
Soit Ω l'unique point invariant de f, k le rapport de f et θ l'angle de f.
f est la composée de l'homothétie $h(\Omega;k)$ de centre Ω et de rapport k et de la rotation $r(\Omega;\theta)$ de centre Ω et d'angle θ.
Ces deux applications commutent, on peut écrire $f = h(\Omega;k) \circ r(\Omega;\theta) = r(\Omega;\theta) \circ h(\Omega;k)$.
Cette décomposition est appelée forme réduite de la similitude directe f.

Définition

Une similitude directe f qui n'est pas une translation est déterminée par la donnée de son centre Ω , son rapport k et son angle θ.
On dit que f est la similitude directe de centre Ω, de rapport k et d'angle θ.
On notera $f = S(\Omega ; k ; \theta)$ (k est un réel strictement positif et θ un réel).

Cas particuliers

Soit $f = S(\Omega ; k ; \theta)$
- Si $k = 1$, la similitude f est une rotation. $f = S(\Omega ; 1 ; \theta) = r(\Omega;\theta)$.
- Si $\theta = 0\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport k. $f = S(\Omega ; k ; 0) = h(\Omega;k)$.
- Si $\theta = \pi\ [2\pi]$, la similitude f est une homothétie de rapport $-k$. $f = S(\Omega ; k ; \pi) = h(\Omega;-k)$.

Propriété (voir démonstration 12)

Soit f une similitude directe ayant pour écriture complexe $z' = az + b$ avec $a \in \mathbb{C}^*$, $b \in \mathbb{C}$.

- Si $a = 1$ et $b = 0$ alors $f = id$.
  Tous les points sont invariants par f.
- Si $a = 1$ et $b \neq 0$ alors f est une translation de vecteur non nul $\overrightarrow{V}$ d'affixe b .
  f n'a aucun point invariant.
- Si $a \neq 1$ alors f est une similitude directe de centre Ω de rapport k et d'angle θ.
  avec $k = |a|$ et $\theta = arg(a)\ [2\pi]$
  f a pour seul point invariant le point Ω.

Remarque

Une similitude directe ayant au moins deux points invariants est nécessairement l'application identique.

Exercice 11 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Donner dans chacun des cas les éléments caractéristiques de la similitude directe f.
1°) f d'écriture complexe $z' = (1 + \sqrt{3})z - 1$.
2°) f d'écriture complexe $z' = iz + 1$.
3°) f d'écriture complexe $z' = z - 2i$.
4°) f d'écriture complexe $z' = -3z + 4 - 2i$.
5°) f d'écriture complexe $z' = (1 + i\sqrt{3})z$.

Exercice 12 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.
Donner dans chacun des cas l'écriture complexe de f.

1°) f est la similitude directe de centre O, de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

2°) f est la similitude directe de centre Ω d'affixe i, de rapport $\frac{1}{2}$ et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.

3°) f est la similitude directe de centre Ω d'affixe $1 - 2i$, de rapport $\sqrt{2}$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Exercice 13 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ l'homothétie h de centre A d'affixe $z_A = 1 + i$ et de rapport -2 et la rotation r de centre B d'affixe $z_B = -1$ et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

Montrer que $h \circ r$ et $r \circ h$ sont des similitudes directes et donner leurs éléments caractéristiques.
A-t-on $h \circ r = r \circ h$?

Exercice 14 (voir réponses et correction)

On considère un triangle ABC tel que $(\overrightarrow{BA},\overrightarrow{BC}) = \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$, AB = 3 et BC = 4.

Soit I le milieu de [BC].
On suppose qu'il existe une similitude directe s transformant A en I et B en C.
Déterminer l'angle et le rapport de s.
Donner une construction géométrique du centre de s.

Exercice 15 (voir réponses et correction)

On considère dans le plan rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$ les points A, B et C d'affixes :

$z_A = 3 - i$; $z_B = 1 - i$; $z_C = i$

Démontrer qu'il existe une similitude directe s et une seule transformant A en B et O en C.
Donner les éléments caractéristiques de s.

Propriété (voir démonstration 13)

Soient A, B, A', B' quatre points du plan tels que A ≠ B et A' ≠ B'.
Il existe une et une seule similitude directe f transformant A en A' et B en B'.

Cas particulier

Étant donnés trois points distincts O, A et B, il existe une et une seule similitude directe de centre O transformant A en B.

Exercice 16 (voir réponses et correction)

Soient A, B, C, D les points d'affixes : $z_A = -1 - i$; $z_B = i$; $z_C = 1 + 3i$; $z_D = 5 + i$
Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe transformant A en C et B en D.

Exercice 17 (voir réponses et correction)

Soient A, B, C, D les points d'affixes : $z_A = 2 - i\sqrt{3}$; $z_B = 1 - i$; $z_C = 5$; $z_D = \sqrt{3} + 1 - i$
Déterminer les éléments caractéristiques de la similitude directe transformant A en B et C en D.

Exercice 18 (voir réponses et correction)

On considère les points A, B, C, P, Q, R dont les affixes respectives sont
$a = 1 - i$; $b = 2 + 3i$; $c = -2 + i$; $p = -1 + 3i$; $q = 2 - 2i$; $r = 4 + 4i$
Démontrer qu'il existe une similitude directe f pour laquelle le triangle PQR est l'image du triangle ABC.

Remarque

Lorsqu'un triangle A'B'C' est l'image par une similitude directe d'un triangle ABC, on dit que ABC et A'B'C' sont directement semblables.

Définition

Une similitude directe de rapport 1 est appelé un déplacement. (Un déplacement est une isométrie)

Remarque

La réciproque d'un déplacement est un déplacement.
La composée de deux déplacements est un déplacement.

Propriété (voir démonstration 14)

- Tout déplacement du plan est soit une translation, soit une rotation.
- La composée d'une translation et d'une rotation d'angle $\theta \neq 0\ [2\pi]$ est une rotation d'angle θ.
- La composée de deux rotations d'angles respectifs θ et θ' est :
  une translation si $\theta + \theta' = 0\ \ [2\pi]$,
  une rotation d'angle $\theta + \theta'$ si $\theta + \theta' \neq 0\ \ [2\pi]$.

Exercice 19 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

Soit t la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ d'affixe $-1 + (\sqrt{2} - 1)i$.

Soit r la rotation de centre Ω d'affixe $1 + i$ et d'angle $\frac{\pi}{4}$.

Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de $t \circ r$
Quelle est la nature de $r \circ t$? Le point O est-il invariant par $r \circ t$? A-t-on $r \circ t = t \circ r$?

Exercice 20 (voir réponses et correction)

On considère h une homothétie de rapport k, et t une translation de vecteur $\overrightarrow{V}$.
Quelle est la nature des applications $h \circ t$ et $t \circ h$?

Exercice 21 (voir réponses et correction)

On considère une homothétie h de rapport k, et une homothétie h' de rapport k'.
Démontrer que $h \circ h'$ est soit une translation, soit une homothétie.

Propriété (voir démonstration 15)

Soit f une similitude non directe (similitude inverse).
On peut écrire f sous la forme $f = g \circ s$, où s est une symétrie axiale et g une similitude directe.
On peut écrire f sous la forme $f = s' \circ g'$, où s' est une symétrie axiale et g' une similitude directe.

Exercice 22 (voir réponses et correction)

Le plan est rapporté au repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$

On considère l'application f dont l'écriture complexe est $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z}$.

1°) Justifier que le point O est invariant par f.
2°) Soit s la symétrie d'axe $(O,\vec{u})$. Démontrer que $f = r \circ s$, où r est une rotation que l'on déterminera.
3°) En déduire un deuxième point invariant par f.
4°) Quelle est la nature de f ?
5°) On considère l'application g dont l'écriture complexe est $z' = \left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right)\overline{z} + 1$.
Donner une construction géométrique de l'image d'un point M par g.

IV Propriétés géométriques des similitudes planes

Propriétés (voir démonstration 16)

Soit f une similitude plane. A, B, C, D sont quatre points et on note $A' = f(A)$, $B' = f(B)$, $C' = f(C)$, $D' = f(D)$

- f conserve les rapports de distances,
  c'est-à-dire que si $A \neq B$ et $C \neq D$, on a $\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD}$.
- f conserve les angles géométriques,
  si A, B et C sont deux à deux distincts, on a $\widehat{A'B'C'} = \widehat{ABC}$.
- f conserve l'alignement,
  si A, B et C sont alignés alors A', B' et C' sont alignés.
- f transforme une droite en une droite,
  si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et la droite (A'B') est l'image par f de la droite (AB).
- f transforme un segment en un segment,
  si A et B sont distincts, A' et B' sont distincts et le segment [A'B'] est l'image par f du segment [AB].
- f conserve le parallélisme et l'orthogonalité,
  si (AB) et (CD) sont deux droites parallèles, alors (A'B') et (C'D') sont deux droites parallèles,
  si (AB) et (CD) sont deux droites perpendiculaires, (A'B') et (C'D') sont deux droites perpendiculaires.
- f conserve le barycentre,
  si G est le barycentre de $(M_1 ; \alpha_1) ; (M_2 ; \alpha_2) ; \dots (M_n ; \alpha_n)$ $(\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_n \neq 0)$, alors son image G' est le barycentre des images affectées des mêmes coeffcients : $(M'_1 ; \alpha_1) ; (M'_2 ; \alpha_2) ; \dots (M'_n ; \alpha_n)$.
- f conserve le milieu,
  si C est le milieu de {A ; B} alors C' est le milieu de {A' ; B'}.
- f transforme un triangle en un triangle semblable,
  si A, B et C sont deux à deux distincts, alors A', B' et C' sont deux à deux distincts et les triangles A'B'C' et ABC sont semblables
  (si f est une similitude directe, on dira que les triangles sont directement semblables, si f est une similitude inverse, on dira que les triangles sont inversement semblables)
- f transforme un cercle en un cercle,
  l'image par f du cercle de centre A et de rayon R est le cercle de centre A' et de rayon kR (où k est le rapport de la similitude f).

Exercice 23 (voir réponses et correction) (voir animation)

On considère dans le plan deux droites parallèles distinctes D et D'. Soit A un point du plan.
On cherche à construire tous les triangles équilatéraux AMM' avec $M \in D$ et $M' \in D'$.
Faire la construction en justifiant et vérifier qu'il y a deux solutions au problème.
Existe-t-il des solutions au problème lorsque les droites D et D' ne sont pas parallèles ?

Exercice 24 (voir réponses et correction) (voir animation)

On considère dans le plan deux droites parallèles distinctes D et D'. Soit A un point du plan.
On cherche à construire tous les carrés AMM'R avec $M \in D$ et $M' \in D'$.
Faire la construction en justifiant et vérifier qu'il y a deux solutions au problème.

Exercice 25 (voir réponses et correction)

On considère un triangle ABC du plan et la rotation r de centre A et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1°) Soit M un point de la droite (BC), $N = r(M)$ et soit I le milieu de [MN].
Déterminer et construire le lieu des points I lorsque M décrit (BC).
2°) Soit P un point du cercle de diamètre [BC], $Q = r(P)$ et soit J le milieu de [PQ].
Déterminer et construire le lieu des points J lorsque P décrit le cercle de diamètre [BC].

Exercice 26 (voir réponses et correction)

On considère on carré direct ABCD de centre O.
On note I, J, K, L les milieux des cotés [AB], [BC], [CD], [DA].
Soit s la similitude directe de centre A transformant B en O. Donner les éléments caractéristiques de s.
Construire l'image du carré ABCD par la similitude s.
Démontrer que s(D) est le symétrique de O par rapport à L.

On considère la translation t de vecteur $\overrightarrow{AI}$ et on pose $f = t \circ s$. Déterminer l'image du carré ABCD par f.
Justifier que $t \circ s$ est une similitude directe dont on donnera les éléments caractéristiques.

Exercice 27 (voir réponses et correction)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

1°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une translation.
Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une rotation d'angle de mesure $\frac{\pi}{2}$.
Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

Exercice 28 (voir réponses et correction)

Dans le plan complexe rapporté au repère orthonormé $(O;\vec{e_1},\vec{e_2})$, on considère l'application F qui à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' définie par :

$z' = u^2 z + u - 1$ où u désigne un nombre complexe.

1°) Déterminer l'ensemble des nombres complexes u pour lesquels F est une homothétie de rapport -2.
Caractériser F pour chacune des valeurs trouvées.

2°) Caractériser F lorsque $u = 1 - i$.

Exercice 29 (voir réponses et correction)

Le plan complexe (P) est rapporté à un repère orthonormal direct $(O;\vec{u},\vec{v})$.

1°) Déterminer l'ensemble (C) des points M de (P) d'affixe z vérifiant : $|(1 - i\sqrt{3})z - \sqrt{3} - i| = 4$.

2°) Déterminer l'écriture complexe de la similitude directe S transformant le point A d'affixe i en O origine du repère et transformant le point B d'affixe $\sqrt{3}$ en B' d'affixe $-4i$.
Préciser le centre, le rapport et l'angle de S.

3°) En utilisant les résultats établis au 2°), retrouver l'ensemble (C) défini au 1°).

Exercice 30 (voir réponses et correction)

Dans le plan orienté, on considère un triangle isocèle ABC tel que AB = AC et $(\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AC}) = \frac{\pi}{4}$.

Soit I le point tel que le triangle CAI soit isocèle rectangle avec $(\overrightarrow{CA},\overrightarrow{CI}) = -\frac{\pi}{2}$.

Pour la figure, que l'on complètera en traitant les questions, on prendra AB = 5cm.

1°) On appelle r_A la rotation de centre A qui transforme B en C et r_C la rotation de centre C et d'angle $-\frac{\pi}{2}$.
On pose $f = r_C \circ r_A$.
a) Déterminer les images par f de A et B.
b) Démontrer que f est une rotation dont on précisera l'angle et le centre O. Placer O sur la figure.
c) Quelle est la nature du quadrilatère ABOC ?

2°) Soit s la similitude directe de centre O qui transforme A en B.
On appelle C' l'image de C par s, H le milieu du segment [BC] et H' son image par s.
a) Donner une mesure de l'angle de s.
Montrer que C' appartient à la droite (OA).
b) Donner l'image par s du segment [OA] et montrer que H' est le milieu de [OB].
c) Montrer que (C'H') est perpendiculaire à (OB).
En déduire que C' est le centre du cercle circonscrit au triangle OBC.