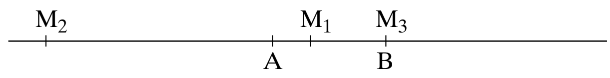
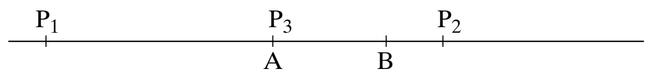
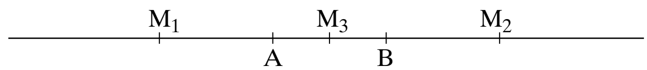
CHAPITRE

12 Barycentre

1 Les prérequis : « Vérifier les acquis »

exercice	prérequis testés	réponses
1	Placer un point M défini par $\overrightarrow{AM} = k\,\overrightarrow{AB}$.	
2	Placer un point M défini par $\overrightarrow{BM} = k\,\overrightarrow{AB}$.	
3	Placer un point M défini par $a\,\overrightarrow{MA} + b\,\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.	
4	Calculer les coordonnées d'un vecteur $a\,\vec{u} + b\,\vec{v}$.	**a)** $\overrightarrow{w_1}(-9\,;5)$ **b)** $\overrightarrow{w_2}(-14\,;9)$ **c)** $\overrightarrow{w_3}(2\,;0)$
5	Reconnaître le centre de gravité d'un triangle.	**a)** G est le centre de gravité du triangle ABC. **b)** $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}$ $\left(h = \frac{2}{3}\right)$

2 Objectifs

- Connaître la définition du barycentre de quelques points pondérés et ses propriétés élémentaires.
- Connaître l'isobarycentre de deux points, de trois points.
- Savoir appliquer, dans des situations simples, le théorème d'associativité.
- Calculer les coordonnées du barycentre.
- Construire le barycentre de deux, trois points.
- Démontrer que des droites sont concourantes à l'aide d'un barycentre.
- Établir l'alignement de points avec l'outil barycentre.
- Connaître le lien entre barycentre et moyenne, entre barycentre et centre d'inertie.
- Savoir utiliser l'outil barycentre dans les démonstrations géométriques.

3 Activités d'approche

3.1 La loi d'Archimède

1. a) Il faut $\begin{cases} 20\,AG_1 = 5\,BG_1 \\ AG_1 + BG_1 = 2 \end{cases}$ ou $\begin{cases} BG_1 = 4\,AG_1 \\ AG_1 = \frac{2}{5}\text{ m} \end{cases}$

donc $AG_1 = 0{,}40$ m $\quad BG_1 = 1{,}6$ m

b) $20\,\overrightarrow{G_1A} + 5\,\overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$

ou encore $4\,\overrightarrow{G_1A} + \overrightarrow{G_1B} = \vec{0}$ et $a = 4,\ b = 1$.

2. Si p est le poids cherché, alors : $20 \times 0{,}8 = p \times 1{,}2$ d'où

$$p = \frac{40}{3}\text{ kg et } 20\,\overrightarrow{G_2A} + \frac{40}{3}\,\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$$

ou $3\,\overrightarrow{G_2A} + 2\,\overrightarrow{G_2B} = \vec{0}$ et $a' = 3,\ b' = 2$.

3. Les poids p_1 et p_2 fixés en A et B vérifient $0{,}5\,p_1 = 1{,}5\,p_2$ d'où, par exemple, $p_1 = 15$ kg, $p_2 = 5$ kg.

3.2 Des forces de sens contraires

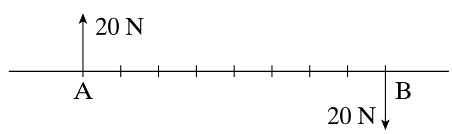
1. a)

La force f cherchée vérifie : $40f = 160 \times 10$

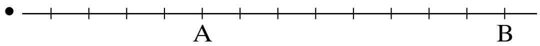
donc $f = 40$ N et $40\,\overrightarrow{GA} - 10\,\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

ou $4\,\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$ donc $a = 4,\ b = -1$.

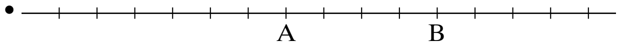
2. a)



Impossible, il n'existe aucun point G.



si $x = AG$ alors $30x = 10(80+x)$, donc $x = 40$ cm et $30\overrightarrow{GA} - 10\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ou $3\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $a = 3$, $b = -1$.



(une unité : 20 cm)
si $x = BG$ alors $10(80+x) = 15x$, donc $x = 160$ cm et $10\overrightarrow{GA} - 15\overrightarrow{GB} = \vec{0}$ ou $2\overrightarrow{GA} - 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $a = 2$, $b = -3$.

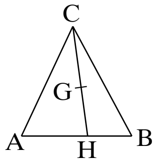
3.3 Le point d'équilibre d'un triangle

1. a) H vérifie $2\overrightarrow{HA} - 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$
ou $2\overrightarrow{HA} - 3(\overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HB}) = \vec{0}$, c'est-à-dire $\overrightarrow{HA} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) Le point G vérifie : $5\overrightarrow{GH} - 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

ou $5(\overrightarrow{GC} + \overrightarrow{CH}) + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ c'est-à-dire

$$\overrightarrow{CG} = \frac{5}{9}\overrightarrow{CH}.$$



c)
$$2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = 2(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA}) + 3(\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HB}) + 4\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HC}$$
$$= 5\overrightarrow{GH} + 2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} + 4\overrightarrow{GC}.$$

Or $5\overrightarrow{GH} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$ et $2\overrightarrow{HA} + 3\overrightarrow{HB} = \vec{0}$
donc $2\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} + 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

2. De même :
a) G est barycentre de (K,6) et (B,3) ;
b) G est barycentre de (L,7) et (A,2).

4 Travaux dirigés

4.1 Reconnaître un barycentre

A. Notion utilisée

- Définition et caractérisation vectorielle du barycentre de deux points, de trois points.
- Théorème d'associativité.
- Calculs vectoriels.

B. Corrigé

1. a) On a $\overrightarrow{GA} = -4\overrightarrow{GB}$, soit $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
G est donc barycentre de (A,1), (B,4).

b) On a $\overrightarrow{GA} = 4\overrightarrow{GB}$, soit $\overrightarrow{GA} - 4(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$
ou encore $5\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$.
G est donc barycentre de (A,5), (B,– 4).

c) On a $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{2}\overrightarrow{AB}$, soit $2\overrightarrow{AG} - 5(\overrightarrow{AG} + \overrightarrow{GB}) = \vec{0}$

ou encore $-3\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}$

$$3\overrightarrow{AG} - 5\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

G est donc barycentre de (A,3), (B,– 5).

2. a) Soit I tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BC}$.

G est milieu de [AI], donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{BI} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \frac{3}{5}(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$.

$\overrightarrow{GA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{GB} + \frac{3}{5}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ainsi G est barycentre de (A,5), (B,2), (C,3).

b) Soit I tel que $\overrightarrow{BI} = \frac{7}{5}\overrightarrow{BC}$.

G est milieu de [AI], donc $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GI} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{BG} + \frac{7}{5}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{GA} - \frac{2}{5}\overrightarrow{GB} + \frac{7}{5}\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

Ainsi G est barycentre de (A,5), (B,– 2), (C,7).

c) $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{BC}$

$5\overrightarrow{AG} - 2(\overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GC}) = \vec{0}$

$5\overrightarrow{AG} - 2\overrightarrow{BG} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

donc G est barycentre de (A,5), (B,– 2), (C,2).

4.2 Isobarycentre d'un tétraèdre

A. Notions utilisées

- Définition de l'isobarycentre.
- Théorème d'associativité.
- Centre de gravité d'un triangle.
- Caractérisation vectorielle du barycentre.

B. Corrigé

1. a) G est barycentre de (A,1), (B,1), (C,1), (D,1) et A' est barycentre de (B,1), (C,1), (D,1). Par associativité du barycentre, G est barycentre de (A,1), (A',3')

G vérifie $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GA'} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}$
donc $G \in [AA']$.

b) On considère B', C', D' centre de gravité respectifs des triangles ACD, ABD et ABC.
On démontre que $G \in [BB']$, $G \in [CC']$ et $G \in [DD']$.
Donc [AA'], [BB'], [CC'], [DD'] sont concourants en G isobarycentre du tétraèdre.

2. On considère I, J, K, L, M, N les milieux respectifs de [AB], [CD], [AC], [BD], [AD], [BC]. Par associativité des barycentres :
G est barycentre de (I,2), (J,2) donc milieu de [IJ],
G est barycentre de (K,2), (L,2) donc milieu de [KL],
G est barycentre de (M,2), (N,2) donc milieu de [MN],
Conclusion : Les segments qui joignent les milieux de deux côtés opposés d'un tétraèdre sont concourants en G isobarycentre de ce tétraèdre.

4.3 Établir l'alignement de points

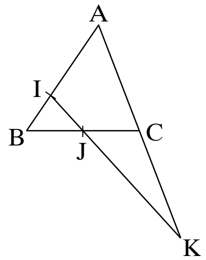
A. Notions utilisées

- Définition vectorielle du barycentre.
- Théorème d'associativité.
- Calculs vectoriels.
- Coordonnées de vecteurs.

B. Corrigé

1. a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc I est barycentre de (A,1), (B,2).

$\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{KC}$, soit $\overrightarrow{KA} - 2\overrightarrow{KC} = \vec{0}$ donc K est barycentre de (A,1), (C,– 2).



J est milieu de [BC] donc J est barycentre de (B,1), (C,1).

b) Le barycentre de (A,1), (B,2), (B,–2) (C,– 2) est celui de (I,3), (J,– 4) d'une part, et celui de (A,1), (C,– 2), d'autre part, c'est-à-dire K.

c) K est barycentre de (I,3), (J,– 4) donc I, J et K sont alignés.

2. a) $\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}$

d'où $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$

$$= -\frac{1}{6}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{6}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}).$$

$\overrightarrow{KA} = 2\overrightarrow{CA}$

donc $\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AK} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{BC} - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$

$$= -\frac{1}{2}(\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}) - \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC}$$

$$= -\frac{1}{2}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AB} + 3\overrightarrow{AC}).$$

b) $\overrightarrow{JK} = 3\overrightarrow{IJ}$ donc I, J et K sont alignés.

3. a) Dans le repère $(A; \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$: $B(1;0)$, $C(0;1)$ et $A(0;0)$.

$$\overrightarrow{AI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} \text{ donc } \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}x_B \\ y_1 = \frac{2}{3}y_B \end{cases} \text{ soit } I\left(\frac{2}{3};0\right).$$

4.4 Des droites concourantes

A. Notions utilisées

- Définition du barycentre.
- Associativité du barycentre.

B. Corrigé

1. a) $\overrightarrow{AM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB})$

ou encore : $4\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MB}$ ou $3\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$.

M est barycentre des points (A,3) et (B,1).

b) $\overrightarrow{AN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{4}(\overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND})$ ou encore

$$4\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{ND} \text{ ou } 3\overrightarrow{NA} + \overrightarrow{ND} = \vec{0}.$$

N est barycentre des points (A,3) et (D,1).

2. G barycentre des points (A,3), (B,1), (C,1), (D,1) par associativité du barycentre :

– les points (A,3), (B,1) peuvent être remplacés par (M,4)

– les points (C,1), (D,1) peuvent être remplacés par (J,2) (J étant l'isobarycentre des points C et D).

G est donc barycentre des points (M,4) et (J,2), on démontre de même que G est barycentre des points (N,4) et (I,2).

G appartient donc aux droites (MJ) et (NJ).

O étant le centre de gravité du triangle DBC, on démontre de même que G est barycentre de (A,3) et (O,3), donc il appartient à la droite (AO), qui est aussi la droite (AC).

Les droites (AC), (MJ), (NI) sont donc concourantes en G.

3. a) J est isobarycentre des points C et D. Par associativité du barycentre, le point H est aussi barycentre des points (A,3) et (J,2), il appartient donc à la droite (AJ).

b) N étant barycentre de (A,3), (D,1), H est donc aussi barycentre de (N,4), (C,1).

Il appartient donc à la droite (NC).

H est le point d'intersection des droites (NC) et (AJ).

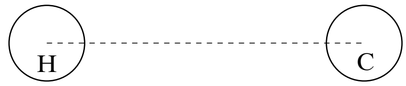
4.5 Centre d'inertie

A. Notions utilisées

- Définition vectorielle du barycentre.
- Centre d'inertie d'un solide.
- Centre d'inertie d'un système formé de plusieurs solides.

B. Corrigé

1.



a) Le centre d'inertie d'une sphère est son centre donc H et C sont les centres d'inertie respectifs des atomes d'hydrogène et de chlore.

b) On note G le centre d'inertie de cette molécule.

G est le barycentre des points $(H, 1{,}66.10^{-24})$ et $(C, 6{,}14.10^{-23})$ ou bien des points $(H, 1{,}66)$ et $(C, 6{,}14)$.

$1{,}66\,\overrightarrow{GH} + 61{,}4\,\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

$63{,}06\,\overrightarrow{GH} + 61{,}4\,\overrightarrow{HC} = \vec{0}$

$\overrightarrow{GH} = \frac{61{,}4}{63{,}06}\overrightarrow{CH}$, donc $GH = \frac{61{,}4}{63{,}06} \times 1{,}3.10^{-10}m$

$GH \approx 1{,}266.10^{-10}m$.

2. a) Le centre d'inertie du parallélépipède est son centre, il se trouve donc à 4 cm du sol, on le note G_S.

b) On assimile le globe à une sphère, son centre d'inertie est donc le centre de la sphère, on le note G_T.

Comme le rayon est 10 cm, le diamètre vaut 20 cm, la hauteur totale étant 30 cm et celle du socle 8 cm, il reste un espace de 2 cm entre la sphère et le socle.

Le point G_T se trouve à la hauteur $10 + 2 + 8 = 20$ cm.

c) Le centre d'inertie de l'ensemble est le point G tel que :

$$m_T\overrightarrow{GG_T} + m_S\overrightarrow{GG_S} = \vec{0}$$

avec m_T masse du globe, $m_T = 0{,}5$ kg.

m_S masse du socle.

La masse volumique du socle est $625\ kg.m^{-3}$,

son volume est $0{,}2 \times 0{,}2 \times 0{,}08 = 3{,}2.10^{-3}m^3$,

sa masse est donc $625 \times 3{,}2.10^{-3} = 2$ kg,

$m_S = 2$ kg.

On a $\frac{1}{2}\overrightarrow{GG_T} + 2\overrightarrow{GG_S} = \vec{0}$, $\overrightarrow{GG_T} + 4\overrightarrow{GG_S} = \vec{0}$

$5\overrightarrow{GG_S} = \overrightarrow{G_TG_S}$, $\overrightarrow{G_SG} = \frac{1}{5}\overrightarrow{G_SG_T}$.

Donc $G_SG = \frac{1}{5}(20 - 4) = \frac{16}{5}$, $G_SG = 3{,}2$ cm.

G est situé à 3,2 cm de sur le segment $[G_SG_T]$.

4.6 Lieu géométrique dans un plan de l'espace

A. Notions utilisées

• Barycentres de 2 et 3 points.

• Géométrie dans l'espace : intersection de plans, de droite et de plan.

• Logiciel geospac.

• Étude des variations d'une fonction.

B. Corrigé

1. Il semble que $\mathscr{E}$ soit une partie de la droite (BI). Plus précisément, si O est le centre de gravité du triangle BCD. $\mathscr{E}$ semble être la droite (IB) privée du segment [BO].

2. a) L'isobarycentre G du tétraèdre est aussi barycentre de (A,1) et (O,3) (associativité du barycentre) donc $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AO}$.

L'intersection des plans ABI et BCD est la droite (BI) (les points B et I appartiennent aux deux plans).

Le point d'intersection N, lorsqu'il existe, de la droite (MG) et du plan (BCD) est donc le point d'intersection des droites (MG) et (BI), l'abscisse de N dans le repère donné est donc nulle.

N n'existe pas si $(MG) // (BI)$ c'est-à-dire si $\overrightarrow{AM} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$ (théorème de Thalès, car $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AO}$), c'est-à-dire si $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$ donc $x \in [0,1]$ et $x \neq \frac{1}{4}$.

b) $\overrightarrow{BG} = \frac{\overrightarrow{BA} + 3\overrightarrow{BO}}{4}$ or $\overrightarrow{BO} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$

donc $\overrightarrow{BG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{3}{4} \times \frac{2}{3}\overrightarrow{BI} = \frac{1}{4}\overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BI}$

donc $G\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2}\right)$ d'où $\overrightarrow{MG}\left(\frac{1}{4} - x, \frac{1}{2}\right)$; $\overrightarrow{NG}\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{2} - y\right)$.

c) $\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{NG}$ sont colinéaires si, et seulement si,

$$\left(\frac{1}{4} - x\right)\left(\frac{1}{2} - y\right) - \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = 0$$

c'est-à-dire si $\frac{1}{8} - \frac{x}{2} - \frac{y}{4} + xy - \frac{1}{8} = 0$ ou $xy - \frac{y}{4} = \frac{x}{2}$

donc $y\left(x - \frac{1}{4}\right) = \frac{x}{2}$ or $x \neq \frac{1}{4}$ d'où $y = \frac{\frac{x}{2}}{x - \frac{1}{4}} = \frac{2x}{4x - 1}$

soit $f(x) = \frac{2x}{4x - 1}$.

d) Pour $x \in [0,1]$ et $x \neq \frac{1}{4}$, $f'(x) = \frac{2x}{(4x - 1)}$ d'où

x	0		$\frac{1}{4}$		1
$f'(x)$		$-$	‖	$-$	
$f(x)$	0 ↘		$-\infty$ ‖ $+\infty$		↘ $\frac{2}{3}$

e) y prend toutes les valeurs sauf celles comprises entre 0 et $\frac{2}{3}$. $\mathscr{E}$ est donc la droite (BI) privée du segment]BO[(on garde B et O).

5 Corrigés des exercices et problèmes

Exercices d'application

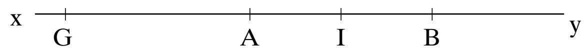
1 - a) oui, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$ **b)** non car $-2 + 2 = 0$

c) oui, $G = B$ **d)** oui, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

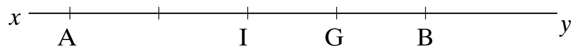
c) oui, $\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ **f)** oui, $\overrightarrow{AG} = \frac{6}{7}\overrightarrow{AB}$.

2 - a) G barycentre de (A,2), (B,– 1) existe car $2 - 1 \neq 0$.

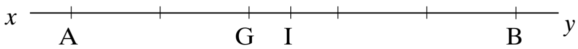
On a $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{GA} = -\overrightarrow{AB}$ donc $G \in [Ax)$.



b) G barycentre de $(A, \sqrt{2})$, $(B, 3\sqrt{2})$ est aussi barycentre de $(A,1)$, $(B,3)$. Donc $\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$, $G \in [IB]$ car $\frac{3}{4} > \frac{1}{2}$.



c) G barycentre de $\left(A, -\frac{3}{4}\right)$, $\left(B, -\frac{1}{2}\right)$ est aussi barycentre de (A,3), (B,2). Donc $3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$, $G \in [AI]$ car $\frac{2}{5} < \frac{1}{2}$.



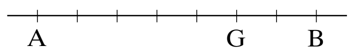
d) G barycentre de $\left(A, \frac{5}{4}\right)$, $\left(B, -\frac{3}{2}\right)$ est aussi barycentre de (A,5), (B,– 6). Donc $5\overrightarrow{GA} + 6\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = 6\overrightarrow{AB}$, $G \in [B, y)$.

3 - a) G barycentre de (A,2), (B,5) vérifie :

$$2\overrightarrow{GA} + 5\overrightarrow{GB} = \vec{0},$$

ce qui donne $7\overrightarrow{GA} = 5\overrightarrow{BA}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{AB}$

$$7\overrightarrow{GB} = 2\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{BG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}.$$

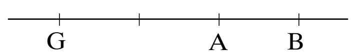


b) G barycentre de $(A, -3)$, $(B, 2)$ vérifie :

$$-3\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}.$$

ce qui donne $\overrightarrow{GA} = 2\overrightarrow{AB}$,

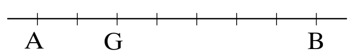
$\overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA}$.



c) G barycentre de $(A, -5\,000)$, $(B, -2\,000)$ est aussi barycentre de $(A, 5)$, $(B, 2)$, on a donc :

$5\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{7}\overrightarrow{AB}$

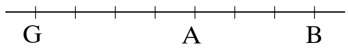
$$\overrightarrow{BG} = \frac{5}{7}\overrightarrow{BA}.$$



d) G barycentre de $\left(A,\frac{1}{4}\right), \left(B,-\frac{1}{7}\right)$ est aussi barycentre de $(A,7), (B,-4)$, on a donc $7\overrightarrow{GA} - 4\overrightarrow{GB} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{AG} = -\frac{4}{3}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{BG} = \frac{7}{3}\overrightarrow{BA}$.



4 - a) G barycentre de $(A,-\sqrt{3}), (B,-2\sqrt{3})$ est aussi celui de $(A,1), (B,2)$.

b) G barycentre de $\left(A,-\frac{5}{8}\right), \left(B,-\frac{1}{4}\right)$ est aussi celui de $(A,5), (B,2)$.

c) G barycentre de $(A,5.10^{-3}), (B,4.10^{-2})$ est aussi celui de $(A,1), (B,8)$.

d) G barycentre de $\left(A,\frac{3-\sqrt{2}}{7}\right), \left(B,\frac{1}{3+\sqrt{2}}\right)$

or $\frac{1}{3+\sqrt{2}} = \frac{3-\sqrt{2}}{9-2} = \frac{3-\sqrt{2}}{7}$ d'où G est isobarycentre de A et B.

5 - a) G barycentre de $(A,6), (B,7)$ est barycentre de $\left(A,\frac{6}{13}\right), \left(B,\frac{7}{13}\right)$.

b) G barycentre de $(A,-2), (B,5)$ est barycentre de $\left(A,-\frac{2}{3}\right), \left(B,\frac{5}{3}\right)$.

6 - a) $\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{AM} - 5\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$5\overrightarrow{MA} - 4\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

donc M est barycentre de $(A,5), (B,-4)$.

b) $3\overrightarrow{MA} = 7\overrightarrow{BM}$

$3\overrightarrow{MA} + 7\overrightarrow{MB} = \vec{0}$

donc M est barycentre de $(A,3), (B,7)$.

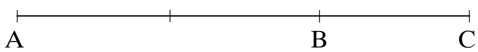
c) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} - \overrightarrow{AM} - \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

$2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} = \vec{0}$

donc M barycentre de $(A,2), (B,1)$.

7 -



$AB = 4\,\text{cm}$
$BC = 2\,\text{cm}$
$AC = 6\,\text{cm}$

a) $\overrightarrow{CA} - 2\overrightarrow{CB} = \vec{0}$, C est barycentre de $(A,1), (B,-2)$.

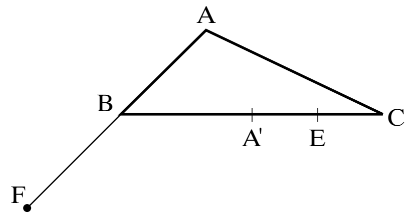
b) $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$, $2\overrightarrow{AC} - 3\overrightarrow{AB} = \vec{0}$,

A est barycentre de $(B,-3), (C,2)$.

c) $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA} + 2\overrightarrow{BC} = \vec{0}$,

B est barycentre de $(A,1), (C,2)$.

8 -



a) On a $\overrightarrow{A'E} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{A'B}$ car $E \in [A'C]$, E est donc milieu de [A'C] et comme A' milieu de [BC] on a :

$$\overrightarrow{CE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CA'} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{CB}\right) = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}.$$

D'où $4\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$4\overrightarrow{CE} - \overrightarrow{CE} - \overrightarrow{EB} = \vec{0}$

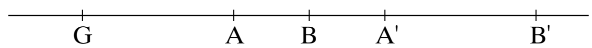
$3\overrightarrow{CE} + \overrightarrow{BE} = \vec{0}$, E est barycentre de $(B,1), (C,3)$.

b) $\overrightarrow{AF} = 2\overrightarrow{BF}$.

$\overrightarrow{FA} - 2\overrightarrow{FB} = \vec{0}$ donc F barycentre de $(A,1), (B,-2)$.

9 - a) G est barycentre de $(A,3)$ et $(B,-2)$ donc :

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-2}{3-2}\overrightarrow{AB} = -2\overrightarrow{AB} \text{ et } \overrightarrow{BG} = 3\overrightarrow{BA}$$



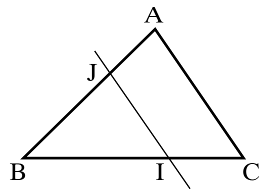
b) $\overrightarrow{A'G} = -4\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{B'G} = 6\overrightarrow{BA} = -6\overrightarrow{AB}$ donc

$\frac{\overrightarrow{A'G}}{4} = \frac{\overrightarrow{B'G}}{6}$ ou encore $3\overrightarrow{A'G} = 2\overrightarrow{B'G}$ ce qui équivaut à

$$3\overrightarrow{GA'} - 2\overrightarrow{GB'} = \vec{0}.$$

G' est barycentre de $(A',3)$ et $B'(-2)$.

10 -



a) I est le barycentre de $(B,1), (C,2)$ donc :

$$\overrightarrow{IB} + 2\overrightarrow{IC} = \vec{0}, \overrightarrow{BI} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}.$$

Comme $(AC) // (IJ)$ d'après le théorème de Thalès :

$$\overrightarrow{BJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA}, 3\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BA} = \vec{0}.$$

$3\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{BJ} - 2\overrightarrow{JA} = \vec{0}$.

J est barycentre de $(A,2), (B,1)$.

b) La parallèle à (AB) qui passe par I coupe la droite (AC) en K.

Comme $\overrightarrow{CI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{CA}$ et avec *a)* K est barycentre de $(C,2), (A,1)$.

11 - a) Les coordonnées $(x;y)$ de G vérifient :

$$x = \frac{3\times3+(-1)(-2)}{3-2} = 11, \; y = \frac{3\times2+(-2)(4)}{3-2} = -2.$$

De même les coordonnées (x',y') de G' vérifient :

$$x' = \frac{(-2)\times3+3(-1)}{-2+3} = -9, \; y' = \frac{(-2)\times2+3\times4}{-2+3} = 8.$$

Donc $G(11;-2)$ et $G'(-9;8)$.

b) Le milieu de [AB] a pour coordonnées :

$$x = \frac{3-1}{2} = 1,\ y = \frac{2+4}{2} = 3.$$

Le milieu de $[GG']$ a pour coordonnées :

$$x = \frac{11-9}{2} = 1,\ y = \frac{-2+8}{2} = 3.$$

[AB] et $[GG']$ ont donc même milieu.

12 - a) $A\left(1;\frac{1}{2}\right)$, $B\left(\frac{3}{2};2\right)$, $\overrightarrow{AB}\left(\frac{1}{2};\frac{3}{2}\right)$, $C\left(-1;-\frac{11}{2}\right)$,

$\overrightarrow{CA}(2;6)$, $\overrightarrow{CA} = 4\overrightarrow{AB}$ donc A, B et C sont alignés.

b) $\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{AC} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$

$5\overrightarrow{CA} - 4\overrightarrow{CB} = \vec{0}$ donc C est barycentre de $(A,5)$, $(B,-4)$.

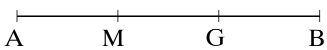
13 - G est le barycentre de (A,a) et $(B,3)$ donc $a+3 \neq 0$

et $x_G = \dfrac{a(-1)+3x}{a+3}$, $y_G = \dfrac{a \times 0 + 9}{a+3}$, $z_G = \dfrac{az+3(-1)}{a+3}$.

d'où $\begin{cases} 1 = \dfrac{3x-a}{a+3} \\ 2 = \dfrac{9}{a+3} \\ 3 = \dfrac{az-3}{a+3} \end{cases}$ $\quad\begin{cases} 3x-3-2a = 0 \\ 2a+6 = 9 \\ 3a+9 = az-3 \end{cases}$

$\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ 3x = 6 \\ 3\left(\dfrac{3}{2}\right)+12 = \dfrac{3}{2}z \end{cases}$ $\quad\begin{cases} a = \dfrac{3}{2} \\ x = 2 \\ z = 11 \end{cases}$

14 - a) G vérifie $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} = \vec{0}$, $\overrightarrow{AG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



b) $\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA} + 2(\overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GB})$

$$= 3\overrightarrow{MG} + \underbrace{\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB}}_{\vec{0}}$$

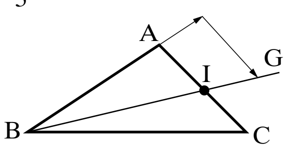
$$= 3\overrightarrow{MG}$$

$\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{AB} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{AB}$

c'est-à-dire $\overrightarrow{MG} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$.

15 - Le barycentre G de $(A,2)$, $(B,-1)$, $(C,2)$ vérifie $2\overrightarrow{GA} - \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

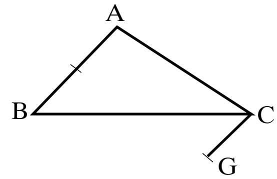
$\overrightarrow{AG} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC}$.



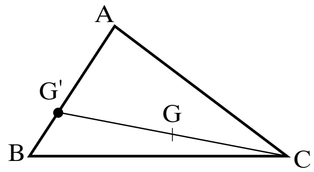
On a aussi G barycentre de $(I,4)$, $(B,-1)$ avec I milieu de [AC] et $\overrightarrow{BG} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BI}$.

16 - G barycentre de $(A,-1)$, $(B,1)$, $(C,2)$ vérifie :

$$-\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + 2\overrightarrow{GC} = \vec{0},\ \overrightarrow{CG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

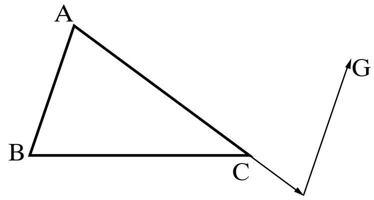


17 - On construit G' barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, G est barycentre de $(G',3)$, $(C,3)$ donc G est milieu de $[G'G]$, G' vérifie $\overrightarrow{AG'} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.



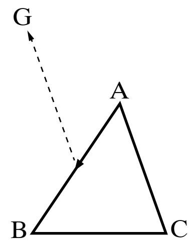
18 - G vérifie $-2\overrightarrow{GA} + 3\overrightarrow{GB} - 4\overrightarrow{GC} = \vec{0}$,

$\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB} + \frac{4}{3}\overrightarrow{AC}$.

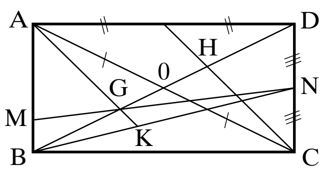


19 - G barycentre de $\left(A,\frac{3}{2}\right)$, $\left(B,\frac{1}{2}\right)$ et $(C,-1)$ est aussi barycentre de $(A,3)$, $(B,1)$, $(C,-2)$

donc $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.



20 - 1.



Soit O le centre du rectangle.

a) H est le centre de gravité du triangle ACD.

b) G est barycentre de $(H,3)$, $(B,2)$,

$\overrightarrow{BG} = \frac{3}{5}\overrightarrow{BH}$

2. a) M barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$ vérifie $\overrightarrow{AM} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.

N barycentre de $(C,1)$, $(D,1)$ est milieu de [CD].

b) G est barycentre de $(M,3)$, $(N,2)$ donc $\overrightarrow{MG} = \frac{2}{5}\overrightarrow{MN}$.

3. a) K barycentre de $(N,2)$, $(B,2)$ est le milieu de [NB].

b) G est barycentre de $(A,1)$, $(K,4)$ d'où $\overrightarrow{AG} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AK}$.

21 - H isobarycentre de $(B,1)$, $(C;1)$, $(D,1)$.
D'après l'associativité du barycentre, G est donc barycentre de $(A,-2)$, $(H,3)$ avec $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AN}$ d'où le point H.

22 - a) $\overrightarrow{AG} = \dfrac{\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}+2\overrightarrow{AD}}{6}$ donc G est barycentre de $(B,1)$, $(C,3)$; $(D,2)$.

b) $\overrightarrow{BG} = \dfrac{3\overrightarrow{BC}+2\overrightarrow{BD}}{6} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BD}$

G a pour coordonnées $\left(\dfrac{1}{2};\dfrac{1}{3}\right)$ dans le repère $(\vec{B};\overrightarrow{BC},\overrightarrow{BD})$, il appartient au plan (BCD).

23 - $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}$, $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}$,
$\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'}$.
G est isobarycentre de A, B, C donc $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}+\overrightarrow{GC} = \vec{0}$
ou encore $\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG} = -\vec{0} = \vec{0}$.
G' isobarycentre de A', B', C' donc :
$\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'} = \vec{0}$ d'où :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AA'}+\overrightarrow{BB'}+\overrightarrow{CC'} &= \overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{CG}+\overrightarrow{GC'}\\ &= (\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{CG})+(\overrightarrow{GA'}+\overrightarrow{GB'}+\overrightarrow{GC'})\\ &= \vec{0}\end{aligned}$$

24 - ABCD est un parallélogramme donc :
$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC} = \overrightarrow{DA}+\overrightarrow{AC}$ d'où $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC} = \vec{0}$.
D est le barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,-1)$.

25 - 1. a) G isobarycentre de ABC a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_G = \dfrac{x_A+x_B+x_C}{3} = 4 \\ y_G = \dfrac{y_A+y_B+y_C}{3} = \dfrac{1}{3} \end{cases}.$$

D'où $G\left(4;\dfrac{1}{3}\right)$.

b) G' barycentre de $(A,1)$, $(B,-2)$, $(C,3)$ a pour coordonnées :

$$\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_A-2x_B+3x_C}{1-2+3} = \dfrac{10}{2} = 5 \\ y_{G'} = \dfrac{y_A-2y_B+3y_C}{1-2+3} = -\dfrac{3}{2} \end{cases}$$

donc $G'\left(5;-\dfrac{3}{2}\right)$.

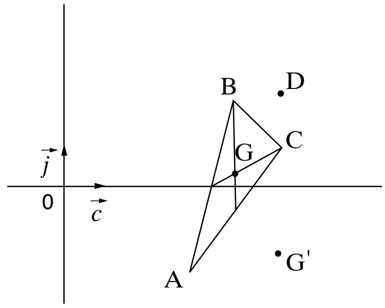
2. Si G' est barycentre de $(A,1)$, $(B,-2)$, $(D,2)$

alors : $\begin{cases} x_{G'} = \dfrac{x_A-2x_B+2x_D}{1-2+2} \\ y_{G'} = \dfrac{y_A-2y_B+2y_D}{1-2+2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 2x_D = x_{G'}-x_A+2x_B = 5-3+8 \\ 2y_D = y_{G'}-y_A+2y_B = -\dfrac{3}{2}+2+4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = \dfrac{9}{4} \end{cases}$$

$D\left(5;\dfrac{9}{4}\right)$



26 - a) $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB} = \vec{0}$ donc D est barycentre de $(A,2)$, $(B,-1)$. Par associativité du barycentre, G est barycentre de $(D,1)$, $(C,1)$ donc G est milieu de [CD], C, D et G sont alignés.

b) $$\begin{cases} x_G = \dfrac{2\times 3+(-1)\times 1+1\times\left(-\dfrac{1}{2}\right)}{2} = \dfrac{9}{4} \\ y_G = \dfrac{2\times 2-1\times 4+1\times 2}{2} = 1 \\ z_G = \dfrac{2\times 1-1(-1)+1\times 1}{2} = 2 \end{cases}$$

d'où $G\left(\dfrac{9}{4};1;2\right)$.
Comme $2\overrightarrow{DA}-\overrightarrow{DB} = \vec{0}$, on a $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{AB}$
d'où $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BA}$.

$$\begin{cases} x_D = 5 \\ y_D = 0, \quad D(5;0;3). \\ z_D = 3 \end{cases}$$

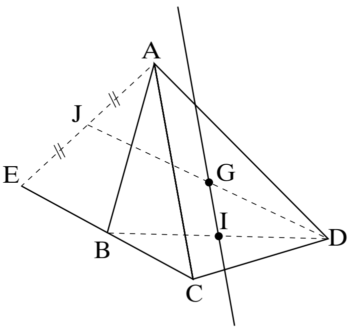
$\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} 5-\dfrac{9}{4} \\ 0-1 \\ 3-2 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{GD}\begin{pmatrix} \dfrac{11}{4} \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} 5+\dfrac{1}{2} \\ 0-2 \\ 3-1 \end{pmatrix}$,

$\overrightarrow{CD}\begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ donc $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{GD}$.

C, G et D sont alignés.

27 - a) • $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$ d'où $\overrightarrow{AM} = 3(\overrightarrow{AM}+\overrightarrow{MB})$ c'est-à-dire $2\overrightarrow{MA}-3\overrightarrow{MB} = \vec{0}$.
M est donc barycentre de $(A,+2)$ et $(B,-3)$.
• De même $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{4}\overrightarrow{BC}$ d'où $\overrightarrow{BN} = \dfrac{1}{4}(\overrightarrow{BN}+\overrightarrow{NC})$ et donc $\dfrac{3}{4}\overrightarrow{NB}+\dfrac{1}{4}\overrightarrow{NC}$, N est donc barycentre de $\left(B,\dfrac{3}{4}\right)$ et $\left(C,\dfrac{1}{4}\right)$ ou de $(B,-3)$, $(C,1)$.
• De $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AC}$ on déduit $\overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{PC}$
$2\overrightarrow{PA}-\overrightarrow{PC} = \vec{0}$, P est barycentre de $(A,2)$ et $(C,-1)$.
b) G barycentre de $(A,2)$, $(B,-3)$, $(C,-1)$ est aussi, en utilisant l'associativité, barycentre de $(A;2)$, $(N,-4)$ mais aussi de $(M,-1)$, $(C,-1)$ et de $(P,1)$, $(B,-3)$, c'est donc le point de concours des droites (AN), (MC), (PB).
c) G est aussi le milieu du segment [NC].

28 - **a)** G est barycentre de $(A,1)$, $(B,2)$, $(C,-1)$ et $(D,2)$, on note E le barycentre de $(B,2)$, $(C,-1)$. $\overrightarrow{CE} = 2\overrightarrow{CB}$ et G est barycentre de $(A,1)$, $(E,1)$, $(D,2)$. En notant J le milieu de [AE], G est barycentre de $(J,2)$, $(D,2)$ donc G est milieu de [JD].



b) I est le milieu de [BD] donc G est barycentre de $(A,1)$, $(I,4)$, $(C,-1)$, c'est-à-dire $\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{GI} - \overrightarrow{GC} = \vec{0}$.

$\overrightarrow{AC} = 4\overrightarrow{GI}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{GI}$ sont colinéaires donc (AC) et (GI) sont parallèles.

29 - **a)** De $\overrightarrow{BI} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$ on déduit $3\overrightarrow{BI} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{IC}$.
I est barycentre de $(B,2)$, $(C,1)$, de même, on montre que J est barycentre $(C,1)$, $(A,3)$ et K barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$.
b) Soit G le barycentre de $(A,3)$, $(B,2)$, $(C,1)$. Par associativité du barycentre G est aussi barycentre de $(K,5)$, $(C,1)$ mais aussi de $(A,3)$, $(I,3)$ et aussi de $(B,2)$, $(J,4)$.
Les droites (AI), (BJ), (CK) sont donc concourantes en G.

30 - **a)** $4\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{BC} = \vec{0}$

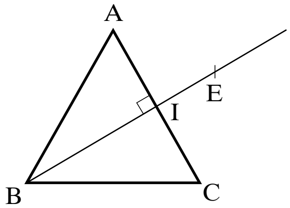
$4\overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{BE} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$-3\overrightarrow{EA} + 2\overrightarrow{EB} - 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

$3\overrightarrow{EA} - 2\overrightarrow{EB} + 3\overrightarrow{EC} = \vec{0}$

donc E est barycentre de $(A,3)$, $(B,-2)$, $(C,3)$

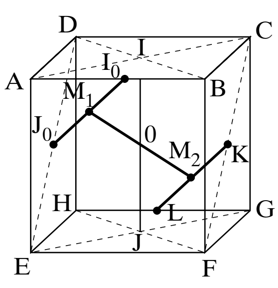
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{BC}$



b) Si I est milieu de [AC], par associativité du barycentre, E est barycentre de $(I,6)$, $(B,-2)$ soit de $(I,3)$, $(B,-1)$, $E \in (IB)$, comme I est milieu de [AC] et que ABC est un triangle équilatéral, E se trouve sur la médiatrice de [AC].
c) De plus E vérifie $BE = \frac{3}{2}BI$ et $BI = \frac{\sqrt{3}}{2}AB$ (hauteur d'un triangle équilatéral).

Donc $BE = \frac{3}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2} \times 3 = \frac{9}{4}\sqrt{3}$ cm ($\approx 3{,}9$ cm).

31 - **1. a)** Pour construire M_1 isobarycentre de ABDE, on peut utiliser I_0 et J_0 milieux respectifs de [AB] et [DE], M_1 est le milieu de $[I_0J_0]$ (associativité).
De même M_2 est le milieu de [KL] où K et L sont les milieux respectifs de [CF] et [GH].



b) O est isobarycentre des points A, B, C, D, E, F, G, H. Par associativité, O est barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $(D,1)$, $(E,1)$, $(C,1)$, $(F,1)$, $(G,1)$, $(H,1)$.
O est barycentre de $(M_1,4)$, $(M_2,4)$ donc O est milieu de $[M_1,M_2]$.
2. I centre de la face ABCD est isobarycentre des points A, B, C, D.
J centre de la face EFGH est isobarycentre des points E, F, G, H.
Par associativité, O est barycentre de $(I,4)$, $(J,4)$ donc O est milieu de [IJ] ainsi I, J et O sont alignés.

Avant d'aller plus loin

QCM

32 - **c)**
33 - **c)**
34 - **b)**
35 - **c)**
36 - **a)**
37 - **b)**
38 - **c)**

Vrai ou faux
39 - V
40 - F
41 - F
42 - V
43 - F
44 - V
45 - F
46 - V
47 - V
48 - V
49 - F

Exercices d'approfondissement

50 - **a)** Par associativité du barycentre, le point G barycentre des points $(A;3)$, $(B;2)$, $(C;1)$ est aussi barycentre des points $(D;5)$ et $(C;1)$.
G étant barycentre des points $(A;2)$, $(B;2)$, $(A;1)$, $(C;1)$ est aussi barycentre des points $(C;4)$ et $(B;2)$ car c'est l'isobarycentre des points A et B et B' est isobarycentre des points A et C.
G est ainsi le point de concours des droites (B'C') et (CD).
b) La droite (AG) coupe la droite (BC) en un point E qui est barycentre des points $(B;2)$ et $(C;1)$ d'après l'associativité du barycentre. On en déduit :

$$\overrightarrow{BE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}.$$

51 - A' est barycentre de $(B,1)$, $(C,1)$ donc d'après les propriétés du barycentre, $\overrightarrow{AA'} = \dfrac{\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{2}$, B' est barycentre de $(C;1)$, $(A;-2)$ donc :

$$\overrightarrow{BB'} = \frac{\overrightarrow{BC} - 2\overrightarrow{BA'}}{1-2} = \frac{\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} - 2\overrightarrow{BA'}}{-1}$$

D'où $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$.

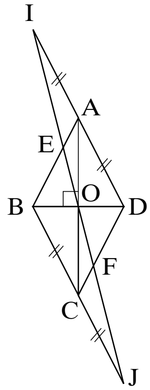
C' est barycentre de $(A;-2)$, $(B;1)$ donc

$$\overrightarrow{CC'} = \frac{-2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CB}}{-2+1} = \frac{-2\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{CA}+\overrightarrow{AB}}{-1}$$

D'où $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AC}$. Donc $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{CC'} = -2\overrightarrow{AA'}$.
Les vecteurs $\overrightarrow{AA'}$, $\overrightarrow{BB'}$, $\overrightarrow{CC'}$ étant colinéaires, les droites (AA'), (BB'), (CC') sont parallèles.

52 - E est barycentre de (A,2) et (B,1) et F est barycentre de (C,2) et (D,1) donc O' barycentre de (E,3), (F,3) est milieu de [EF] et par associativité O' est barycentre de (A,2), (B,1), (C,2), (D,1).
O est milieu de [AC] et [BD] car ABCD est un losange donc par associativité, O' est barycentre de (O,4), (O,2), alors O' = O. La droite (EF) passe donc par O.

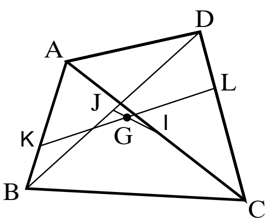
b) ABCD est un losange donc
AB = BC = CD = DA
$\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{FC}$.



Donc $\overrightarrow{DF} = 2\overrightarrow{AE}$ et $(AB) // (CD)$.
D'après le théorème de Thalès :
$\overrightarrow{ID} = 2\overrightarrow{IA}$ et $\overrightarrow{IF} = 2\overrightarrow{IE}$.
De même $\overrightarrow{BE} = 2\overrightarrow{CF}$ donc comme ci-dessus $\overrightarrow{JB} = 2\overrightarrow{JC}$.
Ainsi $\overrightarrow{BJ} = 2\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{ID}$ donc BIDJ est un parallélogramme.

c) BDI est rectangle en B car on sait que AOD est rectangle en O (puisque ABCD est un losange) et A milieu de [ID], O milieu de [BD] d'après le théorème des milieux $(IB) // (AO)$, ainsi comme $(AO) \perp (OD)$ on a $(IB) \perp (BD)$.
De même pour BDJ avec C milieu de [BJ].

53 - **a)** $\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{KB}$
s'écrit $3\overrightarrow{KA} = -2\overrightarrow{AB}$
soit $\overrightarrow{AK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$.
$\overrightarrow{LC} = -2\overrightarrow{LD}$
s'écrit $\overrightarrow{CL} = \frac{2}{3}\overrightarrow{CD}$.

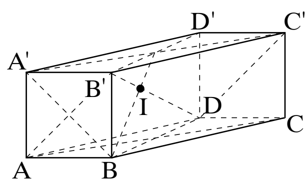


b) $\overrightarrow{KA}+2\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ donc K est barycentre de (A,1), (B,2) ; $\overrightarrow{LC}+2\overrightarrow{LD} = \vec{0}$ donc L est barycentre de (C,1), (D,2). Par associativité, G est barycentre de (K,3), (L,3), G est milieu de [KL].
I est milieu de [AC] donc barycentre de (A,1), (C,1).
J est milieu de [BD] donc barycentre de (B,2), (D,2).
Par associativité, G est barycentre de (1,2), (J,4) donc $G \in (IJ)$.

c) G est milieu de [KL] d'après **b)** et G vérifie :

$$2\overrightarrow{GI}+4\overrightarrow{GJ} = \vec{0},\ \overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GJ} = \vec{0},\ \overrightarrow{IG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}.$$

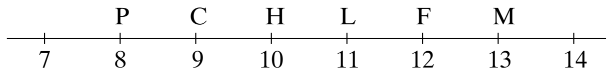
54 - **a)** $\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DB'}$
est équivalent à
$3\overrightarrow{DI} = 2\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{IB'}$,
$\overrightarrow{DI}+2\overrightarrow{B'I} = \vec{0}$,
c'est-à-dire I barycentre de (D,1), (B',2).



I est barycentre de $(A',1)$, $(C',1)$, $(B,1)$, comme le milieu de [A'C'] est aussi celui de [B'D']. I est barycentre de $(B',1)$, $(D',1)$, $(B,1)$. O est milieu de [BD'] et [B'D] donc I est barycentre de $(B',1)$, $(D,1)$, $(B',1)$ et par associativité I est barycentre de $(D,1)$, $(B',2)$.
$I \in (BD')$ et $I \in (A'BC')$ donc le point d'intersection est I.

b) Le plan (ACD') est le symétrique du plan par rapport à O isobarycentre du parallélépipède, (B'D) est sa propre image, or la symétrie centrale conserve les points de concours, donc (B'D) coupe le plan (ACD') en J symétrique de I par rapport à O.

55 - **1.**



2. La moyenne de l'élève est :

$$\frac{(4\times 12)+(3\times 8)+(3\times 10)+(3\times 11)+(9\times 13)+(6\times 9)+(6\times 8)}{4+3+3+3+9+6+6}$$

$$= \frac{177}{17} \approx 10{,}412.$$

Dans le repère où les notes sont les abscisses des différents points considérés, le calcul précédent est celui de l'abscisse du barycentre (F,4), (P,3), (H,3), (L,3), (M,9), (C,6), (S,6).

3. a) • Moyenne des matières littéraires :

$$x_\ell = \frac{(12\times 4)+(8\times 3)+(10\times 3)+(11\times 3)}{4+3+3+3} = \frac{135}{13} \approx 10{,}385.$$

x_ℓ est l'abscisse du barycentre G_1 des points (F,4), (P,3), (H,3), (L,3).

• Moyenne des matières scientifiques :

$$x_s = \frac{(13\times 9)+(9\times 6)+(8\times 6)}{9+6+6} = \frac{73}{7} \approx 10{,}428.$$

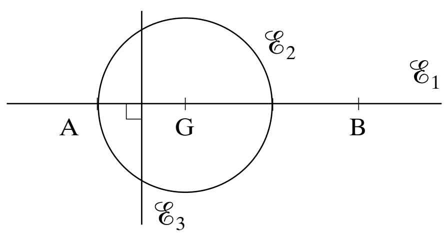
x_s est l'abscisse du barycentre G_2 des points (M,9), (L,6), (S,6).

b) D'après la propriété d'associativité du barycentre, le point G est barycentre des points $(G_1,13)$ et $(G_2,21)$ son abscisse est donc égale à :

$$\frac{(13\times 10{,}385)+(21\times 10{,}428)}{13+21} = 10{,}412.$$

Remarque : on retrouve ainsi une propriété de la moyenne à partir des moyennes de sous-groupes vue en Seconde (*cf.* Hyperbole Seconde page 142).

56 - **1. a)** G barycentre de (A,2), (B,1) vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.
b) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB} = 3\overrightarrow{MG}$.



2. a) $2\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires si et seulement si $3\overrightarrow{MG}$ et $\overrightarrow{AB}$ le sont ; comme $G \in (AB)$, $\mathscr{E}_1 = (AB)$.

b) $M \in \mathscr{E}_2$ signifie $\|3\overrightarrow{MG}\| = AB$ soit $MG = \dfrac{AB}{3}$, $\mathscr{E}_2$ est donc le cercle de centre G et de rayon $\dfrac{AB}{3}$.

c) $M \in \mathscr{E}_3$ signifie $3\,MG = 3\,MA$, $MG = MA$ donc $\mathscr{E}_3$ est la médiatrice de [AG].

57 - 1. P est un point du demi-cercle de diamètre [AB] donc $(PA) \perp (PB)$. (PB) est donc tangente à $\mathscr{C}_1$ en P.

2. G barycentre de ABP vérifie $\overrightarrow{PG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PO}$, G_1 barycentre de MNP vérifie $\overrightarrow{PG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{PA}$.

$\overrightarrow{GG_1} = \overrightarrow{GP} + \overrightarrow{PG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OP} + \frac{2}{3}\overrightarrow{PA} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ est donc un vecteur constant.

3. a) $(G_1E) \mathbin{/\!/} (PO)$ par construction donc $(G_1E) \mathbin{/\!/} (GO)$

$\overrightarrow{GG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ donc $(GG_1) \mathbin{/\!/} (OA) \mathbin{/\!/} (OE)$.

Ainsi G_1GOE est un parallélogramme d'où $\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{GG_1} = \frac{2}{3}\overrightarrow{OA}$ est constant. E est donc fixe.

b) Dans APO, $(EG_1) \mathbin{/\!/} (PO)$. D'après le théorème de Thalès, on a $\dfrac{AE}{AO} = \dfrac{EG_1}{OP}$ or $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AO}$ d'où

$$EG_1 = \frac{1}{3}OP = \frac{1}{6}AB.$$

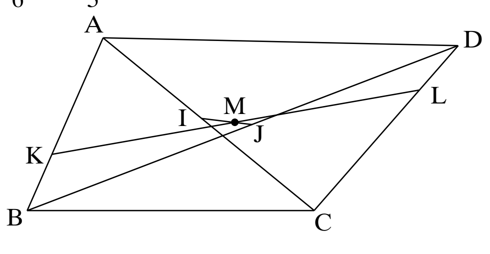
c) Comme E est fixe, G_1 décrit le demi-cercle de centre E de rayon $\frac{1}{6}AB = AE$.

58 - 1. $1+2+1+2 \neq 0$, le barycentre des points (A,1), (B,2), (C,1), (D,2) existe.

• Par associativité du barycentre, G est aussi barycentre des points (K;3) et (L;3) car $\overrightarrow{KA} + 2\,\overrightarrow{KB} = \vec{0}$ signifie que K est barycentre des points (A,1), (B,2) ; de même $\overrightarrow{LC} + 2\,\overrightarrow{LD} = \vec{0}$ signifie que L est barycentre des points (C,1), (D,2).

• I milieu de [AC] est barycentre des points (A,1) et (C,1).
J milieu de [BD] est barycentre des points (B,2) et (D,2).
G est barycentre des points (I,2) et (J,4) par associativité du barycentre.
G est donc le point de concours des droites (KL) et (IJ).

2. C'est aussi le milieu de [KL] puisqu'il est isobarycentre de ces deux points donc $G = M$.
M appartient à la droite (IJ).
M étant barycentre des points (I,2) et (J,4) vérifie $\overrightarrow{IM} = \frac{4}{6}\overrightarrow{IJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{IJ}$, d'où la position de M sur [IJ].



59 - 1. a) G barycentre de (A,1), (B,– 1), (C,1) vérifie

$$\overrightarrow{AG} = \frac{-\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}}{1-1+1} = \overrightarrow{BC}.$$

ABCG est donc un parallélogramme G' barycentre de (A,1), (B,5), (C,– 2) vérifie

$$\overrightarrow{BG'} = \frac{\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{BC}}{1+5-2} = \frac{-\overrightarrow{BA} + 2\,\overrightarrow{AC}}{4} = \frac{\overrightarrow{AB} + 2\,\overrightarrow{AC}}{4}$$

d'où la construction de G'.

2. a) • G' vérifie aussi $\overrightarrow{AG} = \dfrac{5\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}}{1+5-2}$

$$= \frac{5\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}}{4}$$

$$\overrightarrow{GG'} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AG'} = AB - AC + \frac{5\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}}{1+5-2}$$

$$= \frac{9\,\overrightarrow{AB} - 6\,\overrightarrow{AC}}{4}$$

• On a de même, puisque G' est barycentre de (A,1), (B,5), (C,– 2) :

$$\overrightarrow{JG'} = \frac{\overrightarrow{JA} + 5\,\overrightarrow{JB} - 2\,\overrightarrow{JC}}{1+5-2} \qquad (\mathbf{1})$$

J est milieu de $\overrightarrow{AB}$ donc $\overrightarrow{JA} = -\overrightarrow{JB} = \dfrac{\overrightarrow{AB}}{2}$

$\overrightarrow{JC} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{JB}$, d'où en remplaçant dans

$$\overrightarrow{JG'} = \frac{-\overrightarrow{JB} + 5\,\overrightarrow{JB} - 2(-\overrightarrow{JB} - \overrightarrow{AC})}{4}$$

$$= \frac{6\,\overrightarrow{JB} - 2\,\overrightarrow{AC}}{4} = \frac{3\,\overrightarrow{AB} - 2\,\overrightarrow{AC}}{4}$$

• $\overrightarrow{GG'} = 3\,\overrightarrow{JG'}$, les droites (GG') et (JG') sont parallèles et donc confondues et les points J, G, G' sont alignés.
J est donc le point d'intersection des droites (GG') et (AB).

b) Soit H le barycentre des points (A,2), (B,4), (C,– 1).
H est aussi barycentre de : (A,1), (B,– 1) (C,1), (A,1), (B,5), (C,– 2) et donc des points (G,1) et (G',4).
H est aussi barycentre de (A,2), (B,2), (B, 2), (C,– 1) et donc des points (J,4), (I,1).
H appartient donc à la droite (GG') qui est aussi la droite (JG').
H appartient à la droite (IJ) ce qui équivaut à dire que I est sur la droite (HJ) c'est-à-dire la droite (GG').

3. a) K barycentre de (A,a), (D,d), (C,c) est aussi barycentre de (A,a) et (O,a) par associativité du barycentre et donc puisque a est le milieu de [CD] il est isobarycentre de C et D d'où : $d = c = \dfrac{a}{2}$, en particulier on peut prendre $a = 2$, $d = c = 1$.

b) X est alors barycentre de (A,2), (C,1).

60 - a) • Si MNOP est un parallélogramme alors :
$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PN}$ ou encore : $\overrightarrow{PM} - \overrightarrow{PN} + \overrightarrow{PO} = \vec{0}$,
P est donc le barycentre des points (M,1), (N,– 1), (O,1).

• Si P est le barycentre de (M,1), (N,– 1), (O,1) alors :

$$\overrightarrow{MP} = \frac{-\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{MO}}{1-1+1} = \overrightarrow{NO}$$

MNOP est un parallélogramme.
Les deux propositions « MNOP parallélogramme » et « P barycentre (M,1), (N,– 1), (O,1) » sont équivalentes.

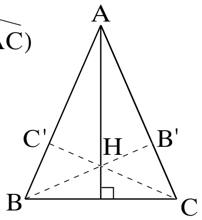
b) ABCD est un parallélogramme donc D est barycentre de (A,1), (B,– 1), (C,1) de même D' est barycentre de (A',1), (B',– 1), (C',1).

Le barycentre de $(A,1)$, $(B,-1)$, $(C,1)$, $(A',1)$, $(B',-1)$, $(C',1)$ est aussi barycentre, par associativité, des points $(D,1)$ et $(D',1)$, c'est donc le milieu L de (DD').
En remplaçant $(A,1)$, $(A',1)$ par leur barycentre I affecté du coefficient 2 :

$(B,-1)$ et $(B',-1)$ par $(J,-2)$
$(C,1)$ et $(C',1)$ par $(K,2)$

L est donc barycentre de $(I,2)$, $(J,-2)$, $(K,2)$ ou encore de $(I,1)$, $(J,-1)$, $(K,1)$ (propriété du barycentre).
IJKL est donc un parallélogramme (d'après 1).
c) De même le barycentre du système $(A, 1)$, $(B,1)$, $(C,1)$ $(D,1)$, $(A',1)$, $(B',1)$, $(C',1)$, $(D',1)$ est aussi barycentre du système $(\Omega_1,4)$, $(\Omega_2,4)$ c'est donc le milieu de $[\Omega_1\Omega_2]$.
Il est aussi barycentre de $(I,2)$, $(J,2)$, $(K,2)$, $(L,2)$ car $(A,1)$, $(A',1)$ par associativité est remplacé par $(I,2)$, etc.
C'est donc l'isobarycentre Ω_3 des points I, J, K, L.
Ω_3 est donc le milieu de $[\Omega_1\Omega_2]$.

61 - a) Dans le triangle ABC :



$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\,AB.AC\cos(\widehat{BAC})$$

d'où $\cos(\widehat{BAC}) = \dfrac{4a^2-9a^2-9a^2}{2\times 3a\times 3a}$.

$$= \frac{14}{18} = \frac{7}{9}.$$

b) $AB' = AB\cos(\widehat{BAC}) = 3a\times\dfrac{7}{9} = \dfrac{7a}{3}$

et donc $B'C = AC - AB' = 3a - \dfrac{7a}{3} = \dfrac{2a}{3}$ d'où $\dfrac{B'A}{B'C} = \dfrac{7}{2}$.
B' étant sur le segment [AC] on en déduit :

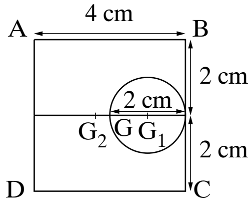
$$2\,\overrightarrow{B'A} + 7\,\overrightarrow{B'C} = \vec{0}.$$

B' est le barycentre des points $(A,2)$, $(C,7)$.
c) C' projeté orthogonal de C sur [AB] est, de même, barycentre des points $(A,2)$, $(B,7)$.
H est donc barycentre des points : $(A,2)$, $(B,7)$, $(C,7)$.

62 -Le barycentre G des points $(S,4)$, $(A,1)$, $(B,1)$, $(C,1)$, $(D,1)$ est aussi barycentre des points $(S,4)$ et $(O,4)$ car O est isobarycentre des points A, B, C, D.
G est donc le milieu du segment [SO].
G est aussi barycentre des points : $(S,1)$, $(A,1)$, $(S,1)$, $(B,1)$, $(S,1)$, $(C,1)$, $(S,1)$, $(D,1)$ par associativité $(S,1)$, $(A,1)$ peut être remplacé par $(I,2)$ de même $(S,1)$, $(B,1)$ par $(J,2)$, etc.
G est donc barycentre de $(I,2)$, $(J,2)$, $(K,2)$, $(L,2)$.
G est donc l'isobarycentre des points I, J, K, L.
Le théorème des milieux appliqué successivement aux triangles SAB, SBC, SCD, SDA montre que : $(IJ)\,//\,(AB)$, $(JK)\,//\,(BC)$, $(KL)\,//\,(CD)$ et $(LI)\,//\,(DA)$.
ABCD est un carré donc $(AB)\,//\,(DC)$ et $(BC)\,//\,(AD)$ d'où $(IJ)\,//\,(KL)$ et $(JK)\,//\,(LI)$.
IJKL est donc un parallélogramme (c'est aussi un carré).
L'isobarycentre G des points I, J, K, L est donc le point de concours des diagonales [IK] et [JL].
G est donc le milieu des segments [SO], [IK], [JL].

63 - a) Oui, par associativité du barycentre $(A,2)$, $(B,2)$ peuvent être remplacés par $(I,4)$.
b) Non, par associativité du barycentre M est aussi barycentre de $(G,3)$ et $(I,2)$.
c) Oui, définition du barycentre, M étant aussi barycentre de $(A,1)$, $(B,1)$, $\left(C,\dfrac{1}{2}\right)$.
d) Non, M est sur la droite (CI).
e) Oui, associativité du barycentre.
f) Non, M est barycentre de $(A,2)$, $(E,3)$ il n'est donc pas isobarycentre de ces deux points.

64 - a) densité : S grammes/cm^2.



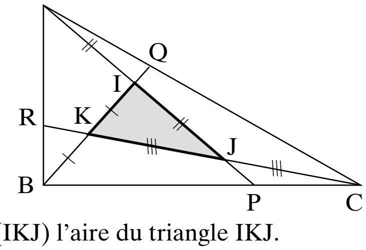
b) Le centre d'inertie G du carré ABCD est son centre.
c) Le centre d'inertie G_1 du disque est son centre car celui-ci est centre de symétrie.
d) G est barycentre de (G_1,m_1), (G_2,m_2)
donc $m_1\,\overrightarrow{GG_1} + m_2\,\overrightarrow{GG_2} = \vec{0}$

$$m_2\,\overrightarrow{GG_2} = m_1\,\overrightarrow{G_1G}$$

$$\overrightarrow{GG_2} = -\frac{m_1}{m_2}\,\overrightarrow{GG_1}.$$

65 - 1. a) Si a et b sont de même signe alors $a+b$ est encore du même signe donc $\dfrac{b}{a+b} \geqslant 0$, de plus $|b| \leqslant |a+b|$ donc $\dfrac{b}{a+b} \leqslant 0$. Comme $\overrightarrow{AG} = \dfrac{b}{a+b}\overrightarrow{AB}$, $G \in [AB]$.
b) $\dfrac{b}{a+b} - \dfrac{1}{2} = \dfrac{2b-a-b}{2(a+b)} = \dfrac{b-a}{2(a+b)}$
$\dfrac{(b-a)(b+a)}{2(a+b)^2} = \dfrac{b^2-a^2}{2(a+b)^2}$ a le même signe que b^2-a^2.
Si $|b| \geqslant |a|$, on a $b^2 \geqslant a^2$ donc $\dfrac{b}{a+b} \geqslant \dfrac{1}{2}$.
G est alors dans la région III
Si $|b| \leqslant |a|$ on a $b^2 \leqslant a^2$ donc $\dfrac{b}{a+b} \leqslant \dfrac{1}{2}$
G est alors dans la région II et G est plus proche de B que de A.
2. On suppose $a < 0$ et $b > 0$.
a) Les cas (a, b) et $(-a, -b)$ sont identiques.
b) Si $|a| \geqslant |b|$ alors $a+b < 0$ d'où $\dfrac{b}{a+b} < 0$. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de sens contraires donc G est dans la région I.
c) Si $|a| \leqslant |b|$ alors $a+b > 0$ et $b > 0$, de plus $a < 0$ donc $a+b < 0$ d'où $\dfrac{b}{a+b} > 1$. $\overrightarrow{AG}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont de même sens avec $AG > AB$ donc G est dans la région IV.

66 -



On notera $\mathscr{A}(IKJ)$ l'aire du triangle IKJ.
Q est barycentre de $(A,2)$, $(C,1)$ et B, I, Q sont alignés donc I est barycentre (B,β), $(Q,3)$, par associativité I est barycentre de $(A,2)$, (B,β), $(C,1)$ avec β réel.
De même P est barycentre de $(B,1)$, $(C,2)$ et P, A, I sont alignés donc I est barycentre de (A,α), $(B,1)$, $(C,2)$ avec α réel.

On a donc I barycentre de (A,α), (B,1), (C,2) et de (A,4), (B,2β), (C,2).
Par identification $\alpha = 4$, $\beta = \frac{1}{2}$ donc I est barycentre de (A,4), (B,1), (C,2).
De même, on trouve J barycentre de (A,1), (B,2), (C,4) et K barycentre de (A,2), (B,4), (C,1).
Le milieu de [BI] est barycentre de (B,7), (I,7) soit de (B,7), (A,4), (B,1), (C,2) et (en regroupant et simplifiant par 2) de (A,2), (B,4), (C,1). Par unicité du barycentre, c'est donc K.
De même I est milieu de [AJ] et J milieu de [CK].
(KI) est médiane du triangle KAJ donc

$$\mathcal{A}(\text{AKI}) = \mathcal{A}(\text{IKJ}),$$

(AK) est médiane du triangle ABI donc

$$\mathcal{A}(\text{AKI}) = \mathcal{A}(\text{IKB}).$$

On a donc $\mathcal{A}(\text{ABI}) = 2\mathcal{A}(\text{IKJ})$.
De même $\mathcal{A}(\text{ACJ}) = 2\mathcal{A}(\text{IKJ})$ et $\mathcal{A}(\text{BKC}) = 2\mathcal{A}(\text{IKJ})$.
On obtient

$$\mathcal{A}(\text{ABC}) = (2+2+2+1)\mathcal{A}(\text{IKJ}) = 7\mathcal{A}(\text{IKJ}).$$

Soit

$$\frac{60\times 35}{2} = 7\mathcal{A}(\text{IKJ}) \text{ et } \mathcal{A}(\text{IKJ}) = \mathcal{A}(\text{IKJ}) = 150 \text{ m}^2.$$

67 - Le centre d'inertie G du croissant est le barycentre des points pondérés (O, m) et $(O', -m')$ où m est la masse du disque de centre O et de rayon 1 et m' celle du disque enlevé de centre O' et de rayon r.
G vérifie $m\overrightarrow{GO} - m'\overrightarrow{GO'} = \vec{0}$
m et m' sont proportionnelles aux surfaces des disques.

Donc $\pi\overrightarrow{GO} - \pi r^2\overrightarrow{GO'} = \vec{0}$, $\quad \overrightarrow{O'G} = \dfrac{1}{1-r^2}\overrightarrow{OO'}$.

G est sur le bord des croissants lorsque $\overrightarrow{O'G} = r$.

Or $\overrightarrow{OO'} = 1-r$, il faut donc que $r = \dfrac{1-r}{1-r^2}$, soit $r = \dfrac{1}{r+1}$.

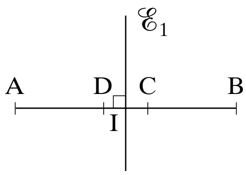
r est solution de $r^2 + r - 1 = 0$, on obtient $r = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$,

$\dfrac{1}{r} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ (nombre d'or).

Problèmes de synthèse

68 - 1. a) C barycentre de (A,2), (B,3) vérifie $\overrightarrow{AC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB}$.

b) D barycentre de (A,3), (B,2) vérifie $\overrightarrow{AD} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB}$.



c) Le milieu I de [AB] est barycentre de (A,5), (B,5) soit de (A,2), (A,3), (B,2), (B,3),
I est donc barycentre de (C,5), (D,5), I est milieu de [CD].

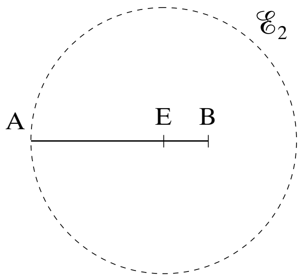
d) M est un point du plan, $2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MC}$ et $3\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MD}$

e) $M \in \mathscr{E}_1$ signifie $\|5\overrightarrow{MC}\| = \|5\overrightarrow{MD}\|$, MC = MD ;
$\mathscr{E}_1$ est donc la médiatrice de [CD].

2. a) AB = 4

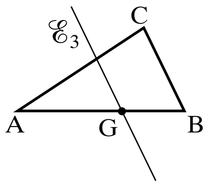
E vérifie $\overrightarrow{AE} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} = 4\overrightarrow{ME}$.



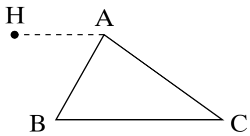
c) $M \in \mathscr{E}_2$ signifie $\|4\overrightarrow{ME}\| = 12$, ME = 3.
$\mathscr{E}_2$ est donc le cercle de centre E et de rayon 3.

3. a) G vérifie $\overrightarrow{AG} = \frac{5}{8}\overrightarrow{AB}$.



b) $3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB} = 8\overrightarrow{MG}$ donc $3\overrightarrow{MA} + 5\overrightarrow{MB}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont colinéaires si et seulement si M est sur la droite passant par G et parallèle à (BC).

4. a) H vérifie $\overrightarrow{AH} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CB}$



b) $2\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MB} - \overrightarrow{MC} = 2\overrightarrow{MH}$.

c) On a donc $\overrightarrow{MM'} = 2\overrightarrow{MH}$ donc M' est le symétrique de M par rapport à H.

d) $\mathscr{E}_4$ est le cercle image de $\mathscr{C}$ par la symétrie centrale de centre H.

69 - a) G barycentre de (A,1), (B,b) et (C,c) existe si et seulement si $1 + b + c \neq 0$.

b) $\begin{cases} x_G = \dfrac{1}{1+b+c}(0+b-c) = \dfrac{b-c}{1+b+c} \\ y_G = \dfrac{1}{1+b+c}(1+0+0) = \dfrac{1}{1+b+c} \end{cases}$

2. a) On a $6\times 6 = 36$ résultats possibles.
L'ordonnée de G est 1 si et seulement si $b + c = 0$; il y a donc 6 couples possibles. $P(y_G = 1) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

b) $x_G = 0 \Leftrightarrow b = c$, il y a 6 couples possibles donc $P(x_G = 0) = \frac{1}{6}$.

c) On a $y_G \neq 0$ donc $P(E) = P(x_G = 0) = \frac{1}{6}$.

70 - 1. a) $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OB}) = \frac{2\pi}{5}$, $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OC}) = \frac{4\pi}{5}$,
$(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OD}) = -\frac{4\pi}{5}$, $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OE}) = -\frac{2\pi}{5}$.

b) $5(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = k2\pi$ signifie $(\overrightarrow{OA}; \overrightarrow{OM}) = k\frac{2\pi}{5}$.

Il y a donc 5 points qui sont obtenus pour $k \in \{0,1,2,3,4\}$, ce sont A, B, C, D, E.

2. a) D'après les mesures déterminées au **1. a)** (OA) est un axe de symétrie du pentagone, en effet $s_{(OA)}(A) = A$, $s_{(OA)}(B) = E$, $s_{(OA)}(C) = D$, $s_{(OA)}(D) = C$ et $s_{(OA)}(E) = B$.

On sait que l'isobarycentre d'une figure est situé sur ses axes de symétrie.

b) D'après **1. a)** la rotation de centre 0 et d'angle $\frac{2\pi}{5}$ conserve le pentagone et les rotations conservent les axes de symétrie ; l'image de (OA) étant (OB), (OB) est un axe de symétrie et l'isobarycentre est sur (OB).

L'isobarycentre du pentagone est donc le point O.

3. $\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD} + \overrightarrow{OE} = \vec{0}$.

Dans le repère $(O;\overrightarrow{OA},\overrightarrow{OJ})$, $x_A + x_B + x_C + x_D + x_E = 0$ et comme (OA) est axe de symétrie,

$1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{4\pi}{5} = 0$.

4. a) $4x^2 + 2x - 1 = 0$ donne $x_1 = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$ et $x_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{4}$.

b) On a $\cos\frac{4\pi}{5} = 2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1$ car $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$.

Donc $1 + 2\cos\frac{2\pi}{5} + 2\left(2\cos^2\frac{2\pi}{5} - 1\right) = 0$,

$4\cos^2\frac{2\pi}{5} + 2\cos\frac{2\pi}{5} - 1 = 0$.

Ainsi $\cos\frac{2\pi}{5}$ est solution de $4x^2 + 2x - 1 = 0$.

c) Comme $\cos\frac{2\pi}{5} > 0$, $\cos\frac{2\pi}{5} = \frac{1+\sqrt{5}}{4}$.

71 - 1. E est barycentre de (A,−2), (B,3) et F celui de (A,−2), (C,3).

Par associativité E est barycentre de (A,−2), (C,3), (C,−3), (D,−3), (D,3), (B,3).

I milieu de [BD] est barycentre de (B,3), (D,3),

J milieu de [CD] est barycentre de (C,−3), (D,−3).

D'où E est barycentre de (F,1), (I,6), (J,−6).

Ainsi E, F, I et J sont coplanaires.

2. a) $K \in (AD)$ donc il existe $\delta \in \mathbb{R} - \{2\}$ tel que K soit barycentre de (A,−2), (D,δ).

$K \in (EIJ)$ donc il existe i et j tels que K soit barycentre de (E,1), (I,2i), (J,2j).

K est barycentre de (A,−2), (B,3), (B,i), (D,i), (C,j), (D,j) $(1 + 2i + 2j \neq 0)$

c'est-à-dire de (A,−2), (B,3 + i), (C,j), (D,$i + j$).

On doit donc avoir $3 + i = 0$, $j = 0$, $i + j = \delta$ c'est-à-dire $j = 0$, $i = \delta = -3$.

K est barycentre de (E,1), (I,−6) donc E, I et K sont alignés.

De même $K \in (FIJ)$ donc il existe i et j tels que K soit barycentre de (F,1), (I,2i), (J,2j), K est barycentre de (A,−2), (C,3), (B,i), (D,i), (C,j), (D,j).

Soit de (A,−2), (B,i), (C,j+3), (D,j) d'où $i = 0$, $j = \delta = -3$ et K est barycentre de (F,1), (J,−6), donc F, I et K sont alignés.

b) K est barycentre de (A,−2), (D,−3) d'où $\overrightarrow{AK} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$.