LES INDICES

I. Définitions et Propriétés

1. Notion d'indice

Dans le domaine des sciences économiques et sociales**,** les grandeurs représentatives des phénomènes (prix, taux de chômage, ...) varient dans le temps et dans l'espace. Il est souvent difficile de les comparer.

Exemple :
La production d'un bien X passe de 30 000 à 36 000 alors que sur la même période la production d'un autre bien Y passe de 100 à 120.
La comparaison immédiate n'a pas beaucoup de sens, mais un calcul simple montre qu'en fait les 2 productions ont augmenté de 20% chacune.

Pour faciliter les comparaisons, on utilise souvent des rapports des grandeurs, ces rapports sont des nombres sans dimension.
Un indice c'est un rapport positif ou nul.

Soit V_o la valeur de ce phénomène à la date o et V_t la valeur de ce phénomène à la date t;

l'expression $I_{t\,/\,o} = \dfrac{Vt}{Vo}$ x 100 est l'indice de la valeur V à la date t, base 100 à la date o.

Exemple : la production du bien X passe de 10 à 15 de 2000 à 2001, de 15 à 18 de 2001 à 2002.

On peut former plusieurs indices :

- $I_{2001/2000} = \dfrac{15}{10} \times 100 = 150$: la production a augmenté de 50% de 2000 à 2001
- $I_{2002/2001} = \dfrac{18}{15} \times 100 = 120$: la production a augmenté de 20% de 2001 à 2002
- $I_{2002/2000} = \dfrac{18}{10} \times 100 = 180$: la production a augmenté de 80% de 2000 à 2002.

On pourrait former d'autres indices comme $I_{2000/2001}$ .....

Dans cet exemple il n'y a qu'une seule grandeur dont on étudie l'évolution, on parle alors d'indice élémentaire. S'il y a plusieurs grandeurs qui interviennent dans la valeur étudiée (Indice des prix INSEE par exemple) on parlera d'indice synthétique.

2. Indice élémentaire

Soit une grandeur dont les valeurs aux dates o et t sont notées V_o et V_t , l'indice élémentaire de la valeur à la date t base 100 à date o s'écrit :

$$I_{t/o} = \frac{V_t}{V_o} \times 100$$

La date o est appelée "base", la date t "courante".

Propriétés :

- la **"circularité"** ou la **"transférabilité"**:

$$I_{2/0} = I_{2/1} \text{ x } I_{1/0} \text{ x } \frac{1}{100}$$

On peut généraliser à plus de 2 dates; par exemples :

$$I_{5/0} = I_{5/4} \text{ x } I_{4/3} \text{ x } I_{3/2} \text{ x } I_{2/1} \text{ x } I_{1/0} \text{ x} \frac{1}{100^4}$$

- la **"réversibilité"** :

$$I_{o/t} = \frac{1}{I_{t/o}} \quad \text{x } 100^2$$

"Attention" : les taux de croissance ne sont pas réversible alors que indices oui.

Remarque : de façon évidente $I_{t/t} = 1$ (ou 100)

- Soit une grandeur A produit de deux autres : A = B x C

alors : I(A) = I(B) x I(C) x $\frac{1}{100}$ pour une période donnée (ou un lieu donné)

Exemple : soit R la recette totale lors de la vente d'un seul produit; en désignant par P son prix unitaire et Q la quantité vendue on a R = P x Q

Si P passe de 20 à 22 DH et Q passe de 5000 à 6000 unités de la date o à la date t, alors on a :

$I^P_{(t/o)} = 110$ et $I^q_{(t/o)} = 120$ et R passe de 100 000 DH à 132 000DH donc :

$I^R_{(t/o)} = 132 = I^P \text{ x } I^Q \text{ x } \frac{1}{100}$

- On a une propriété identique pour une grandeur quotient de deux autres :

si A= $\frac{B}{C}$ alors I(A) = $\frac{I(B)}{I(C)}$ x 100

«Toute variation de valeur d’un bien se décompose en une variation du volume (de la quantité) et une variation du prix de ce bien.»

$$I^V_{(t/o)} = I^P_{(t/o)} \text{ x } I^Q_{(t/o)} \text{ x } \frac{1}{100} .$$

II. Indices synthétiques

Les phénomènes économiques dont on cherche à apprécier les évolutions sont très souvent des agrégats de composants élémentaires.

Exemple : soit un casse-croûte composé de pain, fromage et vin avec les évolutions constatées suivantes sur les prix des trois composants : .

$I^{Pain}(t/o) = 102$; $I^{Fromage}(t/o) = 105$; $I^{Vin}(t/o) = 110$

On peut définir un indice de prix du casse-croûte en prenant une moyenne pondérée des trois indices. (les coefficients de pondération pouvant être l’importance de chaque bien dans la composition du casse-croûte). On parle alors d’indice synthétique.

On aurait pu choisir une moyenne simple des trois indices mais le résultat n'aurait pas traduit correctement l'évolution de la valeur du casse-croûte.
Le choix des coefficients de pondération doit être fait au regard de l'objectif poursuivi.

- **1. <u>Notion de Valeur Globale</u>**

Soit un panier de n biens dont les quantités et les prix évoluent de la date o à la date t.
On désigne, aux dates o et t, les prix unitaires du bien n°= i par P_i (o) et P_i (t); de la même façon les quantités de ce même bien n° i par Q_i (o) et Q_i (t) .
On a alors la valeur du panier à la date o qui est égale à : V(o) = $\sum_i P_i(0)\times Q_i(0)$ et cette valeur à la date t qui est égale à : V(t) = $\sum_i P_i(t)\times Q_i(t)$

donc l'indice de valeur de ce panier base 100 à la date o :

$$I^V(t/o) = \frac{V(t)}{V(o)}\times 100 = \frac{\sum_1 P_i(t)\times Q_i(t)}{\sum_i P_i(o)\times Q_i(o)}\times 100$$

Si I(V) > 100 la valeur du panier augmente mais qui en est la cause : les changements de prix de chaque bien ou les changements de quantité ?
De plus on a (cf I) pour chaque bien : $I^{vi}(t/o) = I^{pi}(t/o) \times I^{qi}(t/o) \times \frac{1}{100}$
en notant v_i la valeur du bien n°i (v_i=p_i x q_i).

Peut-on fabriquer des indices synthétiques de prix et de quantités (ou de volume) pour que cette relation vraie pour chaque bien reste vraie pour la valeur globale du panier?

2. <u>Indices de Laspeyres et Paasche</u>

On remarque que :

$$V(t) = \sum_1 P_i(t)\times Q_i(t)\times\frac{P_i(t)\times Q_i(t)}{P_i(o)\times Q_i(o)} = \sum_i v_i(0)\times I^{v_i}(t/0)\times\frac{1}{100}$$

$$= \sum_i v_i(0)\times I^{p_i}(t/0)\times I^{q_i}(t/0)\times\frac{1}{100^2}$$

d'où : $I^V(t/0) = \frac{V(t)}{V(0)}\times 100 = \sum_i \frac{v_i(0)}{V(0)}\times I^{p_i}(t/0)\times I^{q_i}(t/0)\times\frac{1}{100}$

$$I^V(t/0) = \sum_i \frac{v_i(0)}{V(0)}\times I^{v_i}(t/0)$$

donc l'indice de valeur globale du panier est une moyenne pondérée des indices de valeur de chaque bien avec pour coefficients de pondération les rapports $\frac{vi(o)}{Vi(o)}$ qui représente la part du bien i (de sa valeur) dans la valeur globale du panier à la date o.
En posant pour l'indice des volumes (des quantités) IQ(t/o) = $\sum_i \frac{vi(o)}{Vi(o)} IQi(t/o)$

(formule semblable à celle de I^V), pour respecter $I^{valeur} = I^{prix} \times I^{quantité} \times \frac{1}{100}$

il faut poser : $\frac{1}{I^P(t/0)} = \sum_i \frac{v_i(t)}{V_i(t)} \times \frac{1}{I^{p_i}(t/0)}$

c'est à dire une moyenne harmonique des indices élémentaires de prix, les coefficients de pondération étant les parts des biens dans la valeur globale du panier à la date t.
L'indice des quantités précédent est l'indice de Laspeyres des quantités, noté:

$$L^Q(t/0) = \sum_i \frac{v_i(0)}{V(0)} \times I^{q_i}(t/0)$$

ou encore : $L^Q(t/0) = \frac{\sum_i P_i(0) \times Q_i(t)}{\sum_i P_i(0) \times Q_i(0)} \times 100$

L^Q(t/0) = moyenne arithmétique des indices élémentaires des quantités de chaque bien pondérés par la part du bien dans la consommation à la date o.

L'indice des prix défini ci-dessus est l'indice de Paasche des prix, noté: $\boldsymbol{P^P(t/O)}$ est défini par :

$$\frac{1}{P^P(t/0)} = \sum_i \frac{v_i(t)}{V(t)} \times \frac{1}{I^{P_i}(t/0)}$$

ou encore :

$$P^P(t/0) = \frac{\sum_i P_i(t) \times Q_i(t)}{\sum_i P_i(0) \times Q_i(t)} \times 100$$

$\boldsymbol{P^P(t/O)}$ = moyenne harmonique des indices élémentaires des prix de chaque bien pondérés par la part du bien dans la consommation à la date t.

Remarque : les coefficients de pondération $\frac{vi}{V}$ s'appellent les coefficients budgétaires de la consommation.

On aurait pu faire le choix inverse c'est à dire définir les Laspeyres des prix et Paasche des quantités avec :

$$L^P\left(t/0\right) = \sum_i \frac{v_i\left(0\right)}{V\left(0\right)} \times I^{P_i}\left(t/0\right) = \frac{\sum_i P_i\left(t\right)\times Q_i\left(0\right)}{\sum_i P_i\left(0\right)\times Q_i\left(0\right)} \times 100$$

$$P^Q\left(t/0\right) = \frac{\sum_i P_i\left(t\right)\times Q_i\left(t\right)}{\sum_i P_i\left(t\right)\times Q_i\left(0\right)} \times 100$$

On a les relations fondamentales :

$I^{valeur}(t/o) = L^p(t/o) \times P^Q(t/o) \times \frac{1}{100} = L^Q(t/o) \times P^P(t/o) \times \frac{1}{100}$

Attention, les indices de Laspeyres et Paasche ne sont pas réversibles.

<u>Remarque :</u>

1). Un mathématicien américain Fischer a établi une troisième série d'indices qui ont la propriété de réversibilité en prenant les moyennes géométriques des Laspeyres et Paasche :

$F^p(t/o) = \sqrt{L^P\left(t/0\right)\times P^P\left(t/0\right)}$

$F^q(t/o) = \sqrt{L^Q\left(t/0\right)\times P^Q\left(t/0\right)}$

On a toujours $F^{valeur} = F^p \times F^q \times \frac{1}{100}$ mais l'interprétation des indices de Fischer n'est pas aisée.

2**).** Les indices de Laspeyres servent à la construction des indices de prix .

3**).** Il existe d'autres types d'indices synthétiques non présentés ici.