Chronique 3

Une belle courbe

Quand j'étais élève, j'aimais déjà tracer de belles courbes ; et pourtant à l'époque, il n'y avait pas de calculatrice !

3.1 Une fonction

Cette année, j'ai découvert (ou redécouvert si je l'avais oubliée !) une fonction donnant une belle représentation graphique.

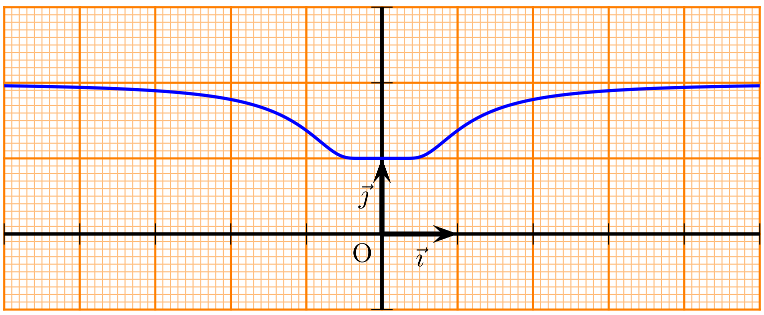
Si on définit la fonction f sur $\mathbf{R}$ par :

$$f(x) = \begin{cases} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + 1 & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0 \end{cases},$$

on a un bel exemple de fonction continue.

En effet, $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} = 0$ donc $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} f(x) = \lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} f(x) = 1 = f(0)$.

Voici sa représentation graphique dans un repère $(\mathrm{O}\,;\vec{\imath},\vec{\jmath})$ orthonormé..



On peut demander à des élèves de conjecturer le tableau des variations de la fonction f à partir de la courbe.

C'est aussi un très bel exemple de « prolongement par continuité » possible.

Remarque : le « $+1$ » dans « $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}} + 1$ » ne sert qu'à décoller la courbe de l'axe des abscisses.

3.2 Quelques rappels

Voici un paragraphe de rappels sur les tracés en PsTricks dont les initiés pourront se passer.

Le listing donnant la courbe est :

```
1  \psset{unit=1cm}
2  \def\xmin{-5} \def\xmax{5} \def\ymin{-1} \def\ymax{3}
3  \begin{pspicture}(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
4  \psgrid[subgriddiv=10,gridlabels=0,gridcolor=orange,subgridcolor=orange!50]
5  \psaxes[labels=none,linewidth=1.2pt](0,0)(\xmin,\ymin)(\xmax,\ymax)
6  \uput[dl](0,0){O}
7  \psaxes[linewidth=1.8pt,arrowsize=3pt 2]{->}(0,0)(1,1)
8  \uput[d](0.5,0){$\vec\imath$} \uput[l](0,0.5){$\vec\jmath$}
9  \def\f{2.7183 -1 x x mul div exp 1 add}%   fonction
10 \psset{plotpoints=2000,linewidth=1.2pt,linecolor=blue}
11 \psplot{\xmin}{-0.001}{\f} \psplot{0.001}{\xmax}{\f}
12 \end{pspicture}
```

Ligne 1

Détermination de l'unité sur les axes. On peut distinguer les unités sur l'axe des abscisses et des ordonnées en entrant, par exemple, `\psset{xunit=1cm,yunit=1.2cm}`.

Ligne 2

On définit les coordonnées des extrémités du rectangle dans lequel on va travailler ; les coordonnées du point en bas à gauche sont `(\xmin,\ymin)`, celles du point en haut à droite sont `(\xmax,\ymax)`.

Ligne 3

On démarre un environnement `pspicture` dont les dimensions ont été définies précédemment.

Ligne 4

On définit une grille qui simule du papier millimétré : chaque unité est divisée en 10, on n'écrit pas les labels sur les axes, la couleur de la grille est orange, et la couleur des subdivisions est orange atténué.
On entrera `\psgrid[subgriddiv=1,gridlabels=0,gridcolor=lightgray]` pour un quadrillage en centimètres.

Ligne 5

On trace les axes sans les labels des graduations et avec des traits d'une largeur de 1,2 point définie par `linewidth`.

Ligne 6

On place en `(0,0)` le nom de l'origine O. L'instruction `\uput` a besoin de 3 paramètres : l'emplacement du texte, les coordonnées du texte, et le texte lui-même.
Pour l'emplacement, le « d » signifie « down », et « l » signifie « left » ; donc « dl » signifie « en bas à gauche ». Cela correspond à un angle de -135° ; on pourrait donc écrire « -135 » à la place de « dl ».
Le texte est situé par défaut à une distance de 5 points du point dont les coordonnées sont définies dans `\uput` ; on peut modifier cette distance en rajoutant un paramètre supplémentaire entre accolades devant les crochets : `\uput{10pt}[dl](0,0){O}`.
Et naturellement, comme il y a « d » et « l » ; il y a « u » pour « up » et « r » pour « right ».

Ligne 7

On trace les vecteurs directeurs comme des axes avec des flèches au bout.
L'épaisseur du trait est définie par `linewidth`, la taille des flèches est définie par `arrowsize`, et l'option `{->}` demande de tracer des flèches au bout des axes.

Ligne 8

On écrit où il faut les noms des vecteurs ; `$\imath$` et `$\jmath$` donnent respectivement le « i » et le « j » sans leur point : $\imath$ et $\jmath$.
C'est plus joli quand on met une flèche dessus avec l'instruction `\vec`.

Ligne 9

On définit en mode post-fixé la fonction f que l'on met dans la variable `\f`. On place les termes dans une pile et on dépile dès que l'on rencontre un opérateur binaire.
Ainsi « `x x mul` » donne x^2, « `-1 x x mul div` » donne $\frac{-1}{x^2}$, « `2.7183 -1 x x mul div exp` » donne $2{,}7183^{\frac{-1}{x^2}}$ et enfin « `2.7183 -1 x x mul div exp 1 add` » donne $2{,}7183^{\frac{-1}{x^2}}+1$.

Ligne 10

On définit quelques paramètres pour le tracé : le nombre de points calculés avec `plotpoints`, l'épaisseur du trait avec `linewidth`, et la couleur du trait avec `linecolor`.

Ligne 11

On trace la représentation graphique de la courbe avec l'instruction `\psplot`.
Attention : l'expression $\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}$ n'étant pas définie pour $x=0$, on trace la courbe en deux morceaux : avant 0 et après 0.

Ligne 12

On referme l'environnement `pspicture`.

3.3 Sa dérivée

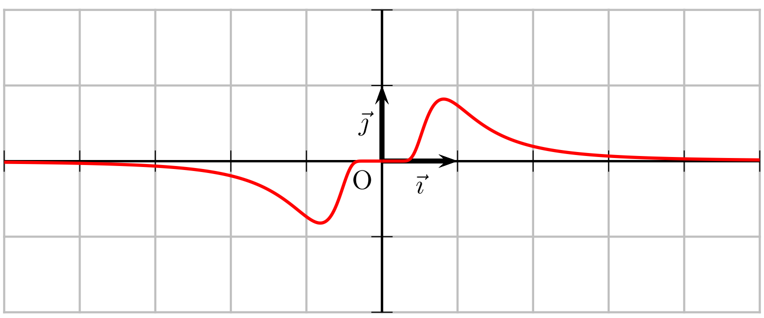
En utilisant les formules de dérivation des fonctions composées, on définit sur $\mathbf{R}^*$ la fonction dérivée f' par :

$$f'(x) = \frac{2}{x^3}\,\mathrm{e}^{-\frac{1}{x^2}}.$$

On peut alors vérifier, ou infirmer, les conjectures qui ont été faites sur le tableau de variations de la fonction f.

On peut également se poser la question de la dérivabilité de f en $x=0$.

La courbe représentative de f' est également intéressante.



Bref : il y a des choses à faire avec cette fonction !