PROBABILITES

I- Théorie des ensembles.

1- Introduction

Les mathématiques utilisent toutes sortes d'ensembles. Nous allons faire une « approche » des notions les plus utilisées de cette théorie.

Un **ensemble** s'apparente à une liste, finie ou non, d'objets distincts possédant une propriété commune. Par exemple, l'ensemble des entiers naturels pairs, l'ensembles des nombres premiers, l'ensemble de polynômes de degré 2 ….

Un ensemble se note avec des **accolades**. Par exemple, si E est l'ensemble des entiers naturels pairs inférieurs à 9, …………………………………………………………………………

On utilisera les symboles $\in$ *ou* $\notin$ pour signifier qu'un élément appartient ou n'appartient pas à un ensemble.

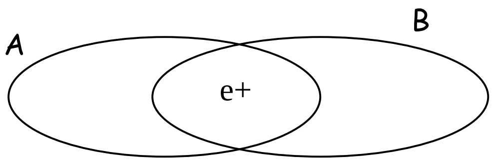
Avec l'exemple précédent, ………………………………… mais ……………………………………….

Enfin, on note $\varnothing$ (**ensemble vide**), l'ensemble qui n'a pas d'éléments.

2- Intersection

<u>L'intersection</u> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont communs à A **<u>et</u>** à B. On la note : $A \cap B$

signifie



<u>Remarque</u> :

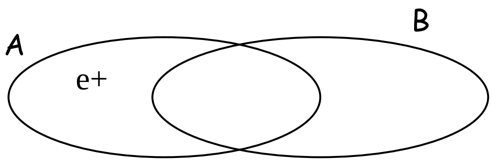
Lorsque $A \cap B = \varnothing$, on dit que les ensembles A et B sont ……………………………ou ……………………………….

3- Réunion (ou Union)

La <u>réunion</u> de deux ensembles A et B est l'ensemble des éléments qui sont dans A **<u>ou</u>** dans B.

On la note : $A \cup B$

signifie

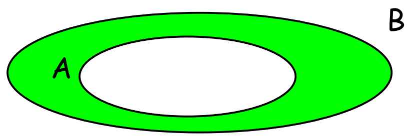


4- Inclusion

On dit qu'un **ensemble A est <u>inclus</u> dans un ensemble B** si tous les éléments de A sont des éléments de B. On note : $A \subset B$

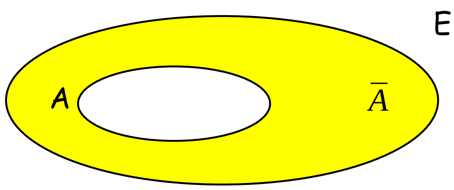
On dit alors que « A est une partie de B »

ou que « A est un sous-ensemble de B ».



5- Complémentaire

Soit E un ensemble et A une partie de E. **Le <u>complémentaire</u> de A dans E** est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A. On le note : $\overline{A}$

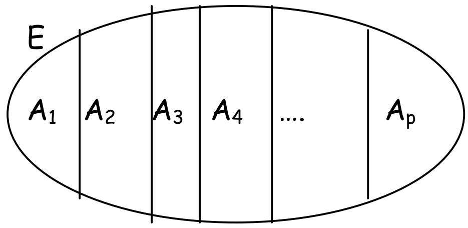


<u>Remarque</u> :

$A \cup \overline{A} = E \quad et \quad A \cap \overline{A} = \varnothing$

6- Partition

Des parties A_1, A_2, A_3, …., A_p d'un ensemble E **constituent une <u>partition</u> de E** si elles sont **deux à deux disjointes et si leur réunion est E.**



$$Pour \ tous \quad i \ et \ j \ de \ \{1;2;...;p\} : i \neq j \ \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$$
$$A_i \cup A_j \cup ... \cup A_p = E$$

7- Cardinal

Le nombre d'éléments d'un ensemble <u>fini</u> est appelé <u>cardinal</u> de E. On la note :

On convient que $Card(\varnothing) = 0$

<u>Exemple</u> **:** Soit E l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10.

Soit A l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 et qui sont pairs.

Soit B l'ensemble des entiers naturels strictement inférieurs à 10 et qui divisibles par 3.

$A \cap B =$

$A \cup B =$

$C \subset B \quad avec \ \ C =$

$\overline{A}$

$\overline{B}$

$Trouver \ \ D \ \ disjoint \quad avec \quad A \quad et \quad D \neq \overline{A}:$

$Trouver \ \ F \ \ tel \ \ que \ \ A, D \ et \ F \ \ forment \ \ une \ \ partition \ \ de \ \ E:$

II – Notion d'événement – Expérience aléatoire

1- Exemple : Lancer de dé

On lance un dé non truqué dont les 6 faces sont numérotées de 1 à 6. A chaque lancer, on note le numéro sorti.
A priori, on ne peut prévoir quel sera le numéro qui va sortir. On dit qu'on effectue **une expérience aléatoire** (épreuve). Il y a 6 résultats possibles, on parle de six **issues** ou six **éventualités**.

L'ensemble de toutes les éventualités possibles est appelé **univers** (ou **univers des possibles**).

On le note Ω.

Ici, $\Omega =$

Puisque Ω est un ensemble fini, on peut déterminer son nombre d'éléments : **Card(Ω)=**

On peut se poser la question suivante : Le nombre sorti est-il pair?

On parle alors de **l'événement** A: "le nombre sorti est pair".

A est ……………………………………………………………..de Ω : A= ………………………………………

Cas particulier

- Un **événement élémentaire** est un événement qui ne contient qu'une seule issue.

  Exemple : l'événement C : "le nombre sorti est supérieur strictement à 5" ne contient qu'un seul élément : $C=\{6\}$

- **L'événement certain** (ou **l'univers**) est l'ensemble de toutes les issues possibles.

- **L'événement impossible** $\varnothing$ est l'événement qui ne contient aucune issue possible.

2- Probabilité d'un événement

a- Théorème : Loi des grands nombres.
Si on répète un grand nombre de fois une expérience aléatoire, alors la fréquence d'apparition d'une éventualité se stabilise autour d'une valeur théorique fixe.

Cette valeur théorique s'appelle la **probabilité** d'obtenir l'événement correspondant.

b- Définition

Soit Ω l'univers associé à une épreuve aléatoire E.
A chaque événement on associe un **nombre réel appelé probabilité** de cet événement tel que :

- La probabilité d'un événement A, notée P(A), est la somme des probabilités des événements qui sont dans A.

- La probabilité d'un événement A est un nombre toujours compris ente 0 et 1 :
  $\mathbf{0 \leq P(A) \leq 1}$

- La somme des probabilités de chaque événement possible est toujours égale à **1**.

Remarques :

- La probabilité d'un événement certain (univers) est égale à 1 : **$P(\Omega) = 1$**
- La probabilité de l'événement impossible est nulle : **$P(\varnothing) = 0$**
- Si A_1, A_2, A_3 forment une partition de A, alors **$P(A) = P(A_1) + P(A_2) + P(A_3)$**

c- Equiprobabilité

Si tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit alors qu'on est en **situation d' équiprobabilité.**

Si $\Omega=\{e_1, e_2, e_3, \ldots e_n\}$ alors : $p(e_1)=p(e_2)=\ldots=p(e_n)=\frac{1}{n}$

En situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est donc: **p(A)=** $\frac{Card\,(A)}{Card\,(\Omega)}$

Exemple 1 : « On a une chance sur 6 d'obtenir la face 1 ». Cette phrase se traduit en langage des probabilités par :

Si A est l'évènement : « obtenir la face 1 » alors $p(A)=\frac{1}{6}$

Exemple 2 : Si B est l'événement : « obtenir un nombre pair », alors, puisque le dé n'est pas truqué. On dit qu'il y a **équiprobabilité.** Dans ce cas :

$p(A)=\frac{nombre\ d'éléments\ de\ A}{nombre\ d'éléments\ de\ \Omega}=\frac{card(A)}{card(\Omega)}$. Soit, $p(B)=$......................

Exemple 3 : On suppose que le dé est truqué et les probabilités d'obtenir le 1,2,3,4,5,6 sont respectivement : $\frac{1}{10}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{8}$; $\frac{3}{10}$; $\frac{1}{10}$

Si C est l'évènement : « obtenir un nombre pair », il n'y a pas équiprobabilité. Dans ce cas, la probabilité de C est la somme des évènements élémentaires contenus dans C.

alors on peut avoir le 2 **ou** le 4 **ou** le 6 ce qui se traduit par :

$p(C)=$ ..... + ... + ... = ...

d- Propriétés

- Pour tout évènement A, $p(A)=1-p(\overline{A})$
- Une probabilité est toujours comprise entre 0 et 1
- Si A et B sont **incompatibles**, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$ et $p(A\cap B)=0$
- Si A et B ne sont **pas incompatibles**, $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$

3- <u>Point méthode</u>

a- Tirage avec remise et avec un ordre.

Exemple : Une urne contient trois boules, 1 rouge, 1 bleue et 1 verte, notées R, B et V.
Combien a-t-on de possibilités de tirer deux boules successivement, avec remise de la $1^{\text{ère}}$ boule tirée ?

Une issue est une liste ordonnée de deux lettres, distinctes ou non, prises parmi les trois lettres R, B, V.
Chaque issue peut être schématisée par un chemin constitué de deux branches successives de l'arbre de dénombrement ou par un tableau à double entrée.

L'ensemble des issues possibles est :

Le nombre total d'issues est :

A partir de l'étude précédente, on appelle :
E_1 l'événement : « Obtenir deux boules de même couleur ».
E_2 l'événement : « Obtenir une boule rouge au $2^{\text{ème}}$ tirage».
E_3 l'événement : « Obtenir deux boules de couleurs différentes ».
E_4 l'événement : « Obtenir deux boules rouges ».
Déterminer p(E1), P(E2), P(E3), P(E4), $P(E_1 \cap E_2)$, $P(E_1 \cup E_2)$, $P(E_1 \cap E_3)$, $P(E_1 \cup E_3)$.

b- Tirage successif sans remise et avec un ordre.

Exemple : Une urne contient trois boules notées R, B et V.
Combien a-t-on de possibilités de tirer deux boules successivement, sans remise de la 1ère boule tirée ?

Une issue est une liste ordonnée de deux lettres, distinctes ou non, prises parmi les trois lettres R, B, V.
Chaque issue peut être schématisée par un chemin constitué de deux branches successives de l'arbre de dénombrement ou par un tableau à double entrée privé de sa diagonale.

L'ensemble des issues possibles est :

Le nombre total d'issues est :

c- Tirage simultané et sans ordre.

Exemple : Une urne contient trois boules notées R, B et V.
Combien a-t-on de possibilités de tirer simultanément deux boules ?

Puisque l'on tire les deux boules en même temps, on ne peut plus utiliser d'arbre, l'arbre étant réservé aux listes ordonnées. Par exemple, on ne doit pas distinguer RB de BR.
Si on utilise un tableau, on ne garde que la partie supérieure du tableau.

L'ensemble des issues possibles est :

Le nombre total d'issues est :

d- **Pour simplifier certains calculs de probabilité**, il est parfois plus simple de déterminer la probabilité de son événement contraire, $\overline{A}$, puis de calculer P(A) = 1-P($\overline{A}$).

Exemples :
« au plus deux jetons noirs « a pour contraire :

« au moins 1 jeton noir » a pour contraire :

« A ou B » a pour contraire :

e- **Pour calculer une probabilité**, on peut commencer par dénombrer les cas possibles, puis les cas favorables. On peut alors s'aider :

a. D'un arbre pondéré
b. D'un diagramme
c. D'un tableau.

Remarques :
Lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la somme des probabilités affectées aux branches issues d'un même nœud est égale à 1.
Lorsqu'une situation est représentée par un arbre pondéré, la probabilité d'un événement correspondant à un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur chaque branche de ce chemin.

III- Lois de probabilité discrètes

1- Loi de probabilité et variable aléatoire

Exemple :
Une urne contient dix boules indiscernables au toucher, l'une d'entre-elles est blanche, deux sont bleues, trois sont rouges et les autres sont noires.
L'expérience consiste à extraire au hasard une boule de l'urne . Si la couleur de la boule est blanche, on marque 5 points ; si elle est bleue, on marque 3 points ; si elle est rouge, on marque 1 point et si elle est noire, on ne marque rien.
L'univers Ω de cette expérience est formé de l'ensemble des 10 boules. On s'intéresse aux 4 évènements suivants qui forment une partition de Ω :

A_1 : « la boule tirée est blanche » dont la probabilité est ………

A_2 : « la boule tirée est bleue», dont la probabilité est ………..

A_3 : « la boule tirée est rouge », dont la probabilité est ………..

A_4 : « la boule tirée est noire », dont la probabilité est ………..

A chaque événement élémentaire, on associe un nombre.
On définit ainsi une **variable aléatoire**.

Dans cet exemple, la variable aléatoire est ………………………………………………………….

On peut établir le tableau suivant :

valeurs possibles de l'expérience, x_i				
probabilité correspondante, p_i				

La liste des probabilités de chaque issue définit une loi de probabilité.

Définition : Définir **la loi de probabilité d'une expérience aléatoire**, c'est :

- faire une partition de l'univers Ω avec les évènements constitués par les différentes issues possibles de l'expérience : x_1, x_2, … , x_n,
- déterminer les probabilités de chacun de ces évènements : p_1, p_2, … , p_n,

On consigne les résultats dans un tableau tel que celui-ci :

valeurs possibles de l'expérience	x_1	x_2	...	x_n
probabilité correspondante	p_1	p_2	...	p_n

Remarque : on a $p_1 + p_2 + ... + p_n = 1$.

Définition : Lorsque toutes les issues sont équiprobables (c'est à dire que toutes les probabilités p_i sont égales), on dit que la loi de probabilité est **équirépartie** ou **uniforme**.

2- Espérance mathématique, variance et écart-type

Dans ce paragraphe, on considère une épreuve dont les issues sont les nombres réels x_1, x_2, ..., x_n.
Ces nombres sont les valeurs d'une grandeur que l'on peut noter X.
La loi de probabilité de X est alors :

valeurs possibles	x_1	x_2	...	x_n
probabilité	p_1	p_2	...	p_n

Définition 1: **L'espérance mathématique** de cette loi est le nombre noté **E(X)** égal à :

Remarque : l'espérance mathématique correspond à la moyenne des valeurs x_1, x_2, ..., x_n pondérée par les coefficients p_1, p_2, ... , p_n.

Remarque : E(X) est le gain moyen que l'on peut espérer à ce jeu. Si E(X)=0 on dit que le jeu est équitable, si E(X) <0 le jeu est désavantageux, si E(X)>0 le jeu est avantageux.

Définition 2: La **variance** de cette loi est le nombre noté **V(X)** défini par :

La variance est également donnée par la formule :

Définition 3 : **L'écart-type** de cette loi, noté σ, est la racine carrée de la variance :

Exemple : Calcul de l'espérance mathématique, de la variance et de l'écart-type avec l'exemple précédent.

Exemple 1 : utilisation d'un tableau

Un établissement de 930 élèves regroupe deux sections : une classique et une technique.
30% des élèves de l'établissement sont en section technique.
40% des élèves de l'établissement sont des garçons.
25% des garçons sont en section technique.

a- Montrer que l'effectif des garçons en section technique est 93.
b- Calculer l'effectif des filles en section classique.
c- On choisit au hasard un élève de l'établissement, quelles sont les probabilités des événements A, B et C suivants :

A : « c'est un garçon de section technique ».
B : « Sachant que c'est un garçon, c'est un élève de la section technique ».
C : « Sachant que c'est un élève de la section technique, c'est un garçon ».

Pour répondre aux questions, dressons un tableau.

	Garçons	Filles	Total
Section classique			
Section technique			
Total			

<u>Exemple 2 : utilisation d'un arbre pondéré.</u>

Un lycée ne comporte que des classes de seconde, première et terminale. Les effectifs sont les suivants : 512 en seconde, 430 en première, 390 en terminale. On sait que 9% des élèves de seconde, 4% des élèves de première et 3% des élèves de terminale pratiquent l'option arts plastiques.

On définit les événements suivants :

S : « L'élève est en seconde ».

P : « L'élève est en première ».

T : « L'élève est en terminale ».

A : « L'élève suit l'option arts plastiques ».

On choisit un élève au hasard.

a- Quelle est la probabilité pour que cet élève soit un élève de seconde pratiquant l'option arts plastiques ?

b- Quelle est la probabilité pour que cet élève soit un élève de terminale ne pratiquant pas l'option arts plastiques ?

c- Quelle est la probabilité pour que cet élève pratique l'option arts plastiques ?

Pour répondre aux questions, dressons un arbre pondéré.