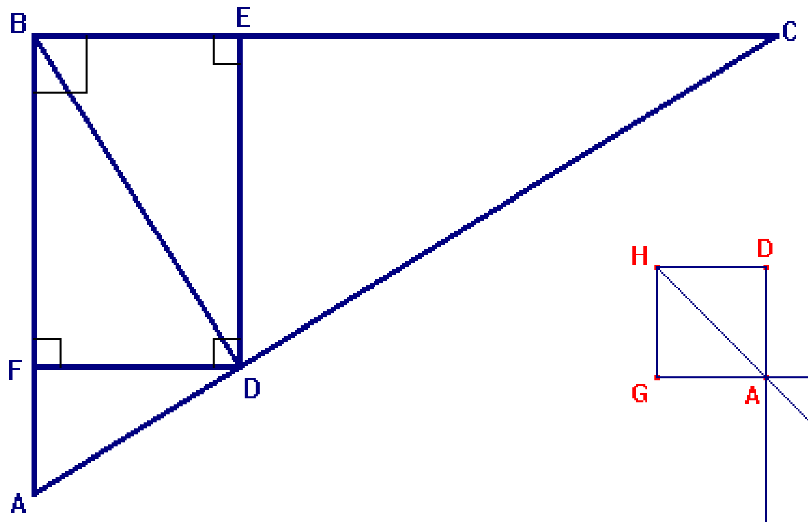
DS N°8 GEOMETRIE – correction des sujets A-B-Rattrapage

A - TRIANGLES SEMBLABLES ET ISOMÉTRIQUES

Exercice 1 – reconnaître des triangles semblables et isométriques



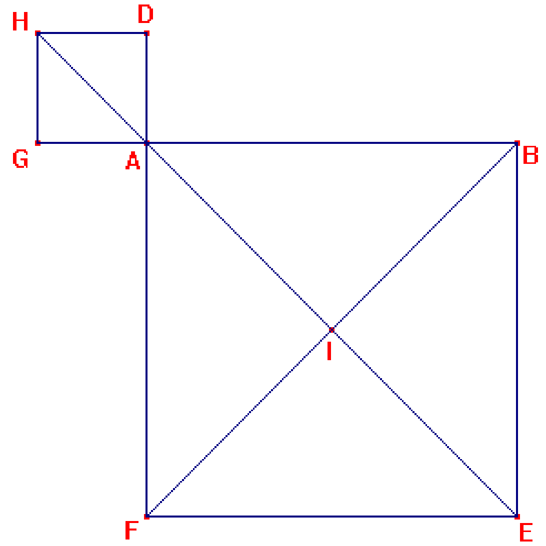


figure sujet A et B

figure sujet R

Il y avait une erreur de codage : la figure aurait dû mentionner $[BD]\perp[AC]$ mais les élèves l'ont intégré dans leur réflexion.

1. Dans la figure des sujets A et B on a :

   BED, BFD, BEF, FDE isométriques entre eux

2. Dans la figure du sujet de rattrapage on a :

   HGA, HDA, HDG, DGA isométriques entre eux

   AFE, ABE, ABF, BEF isométriques entre eux

   AIB, BIE, EIF, FIA isométriques entre eux

   HGE, EDH isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

   GAF, DAB isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

   IDH, IGH isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

   BDI, FGI isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

   BGF, FDB isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

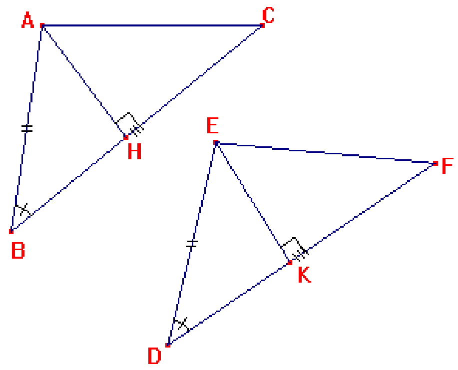
   FHI, BHI isométriques (symétriques par rapport à la droite (HE))

3. Dans la figure des sujets A et B on a :

   $BED, BFD, BEF, FDE, FDA, EDC, ABC, BDA$ semblables

4. Dans la figure du sujet de rattrapage les trois premières listes de triangles isométriques sont tous semblables entre eux car tous isocèles rectangles, donc pris deux à deux avec trois angles respectivement égaux.

Exercice 2 – Preuve de théorèmes du cours



> *Deux triangles sont isométriques s'ils ont un angle égal compris entre deux côtés respectivement de même longueur*

Evidemment si le but de l'exercice est de démontrer ce théorème, il ne devait pas être utilisé dans la résolution.

On démarre donc avec comme hypothèse celle du théorème :

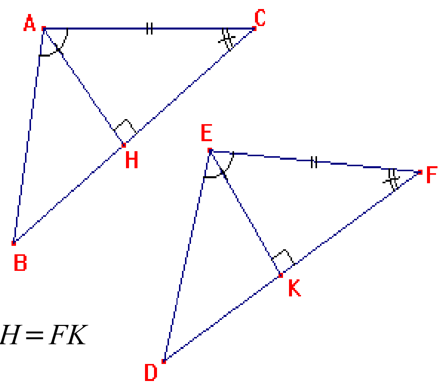
Les triangles ABC et DEF ci contre ont leurs côtés AB et BC d'une part, DE et DF d'autre part, respectivement égaux, et $\widehat{ABC}=\widehat{EDF}$

Et on va dérouler les questions pour montrer que finalement ils ont trois côtés de même longueur c'est à dire qu'ils sont isométriques :

1) on a $\sin(\widehat{ABH})=\dfrac{AH}{AB}$ et $\sin(\widehat{EDK})=\dfrac{EK}{ED}$ or par hypothèse $AB=ED$ et $\widehat{ABH}=\widehat{EDK}$ donc leur sinus est le même et finalement $AH=EK$
2) En utilisant le cosinus des angles $\widehat{ABH}=\widehat{EDK}$ on obtient $BH=DK$
3) $\begin{cases} HC=BC-BH \\ KF=DF-DK \end{cases}$ or $BC=DF$ par hypothèse, et $BH=DK$ d'après la question précédente.

   Donc $BC-BH=DF-DK$ c'est à dire $KF=HC$
4) dans les triangles rectangles AHC et EKF on applique le théorème de Pythagore, et on a $\begin{cases} AC^2=AH^2+HC^2 \\ EF^2=EK^2+KF^2 \end{cases}$ et puisque toutes les longueurs des membres de droite sont égales, on en déduit que $AC=EF$
5) Finalement les triangles ABC et DEF ont leurs trois côtés respectivement égaux et sont isométriques.

   On peut donc conclure que lorsque deux triangles ont un angle égal compris entre deux cotés respectivement égaux alors ils sont isométriques.



> *Deux triangles sont isométriques s'ils ont un côté de même longueur compris entre deux angles respectivement égaux*

On démarre donc avec comme hypothèse celle du théorème :

Les triangles ABC et DEF ci contre ont leurs côtés $[AC]$ et $[EF]$ de même longueur, $\widehat{CAB}=\widehat{FED}$ et $\widehat{ACB}=\widehat{EFD}$

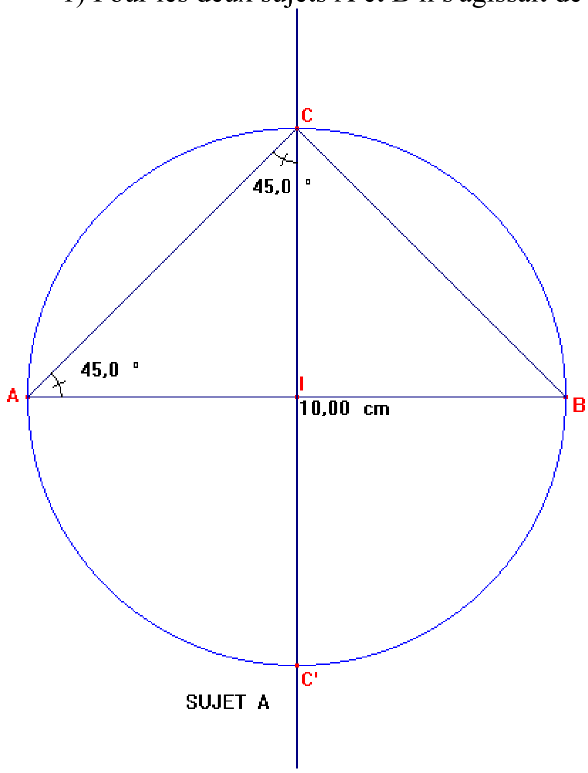
1) on a $\cos(\widehat{ACH})=\dfrac{CH}{AC}$ et $\cos(\widehat{EFK})=\dfrac{FK}{EF}$ entrainant $CH=FK$
2) on a $\sin(\widehat{ACH})=\dfrac{AH}{AC}$ et $\sin(\widehat{EFK})=\dfrac{EK}{EF}$ entrainant $AH=EK$
3) Les triangles AHC et EKF ont trois côtés respecivement de même longueur et sont isométriques
4) Ils ont donc trois angles égaux et $\widehat{HAC}=\widehat{KEF}$, puis $\begin{cases} \widehat{BAH}=\widehat{BAC}-\widehat{HAC} \\ \widehat{DEK}=\widehat{DEF}-\widehat{KEF} \end{cases}$ entraîne $\widehat{BAH}=\widehat{DEK}$
5) Soit $\alpha=\widehat{BAH}=\widehat{DEK}$: puisque AH=EK, on peut calculer $\cos\alpha=\dfrac{AH}{AB}=\dfrac{EK}{ED}$ et on en déduit $BA=ED$, puis $BH=DK$ avec $\sin\alpha$ et enfin $BC=DF$

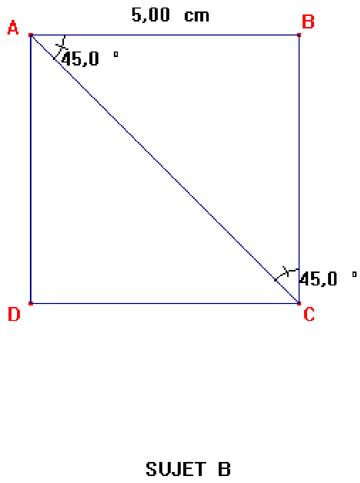
   On en conclut que les triangles ont trois côtés respectivement de même longueur, et sont isométriques ce qui prouve le théorème du cours.

B - GEOMETRIE GENERALE

Exercice 3 - valeur exacte d'un cosinus

1) Pour les deux sujets A et B il s'agissait de calculer la valeur exacte de $\cos 45°$





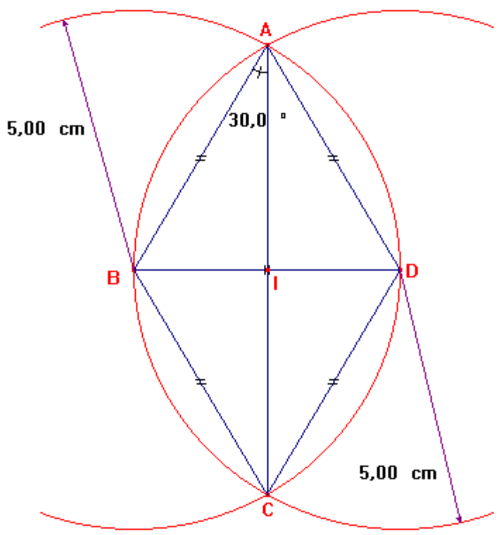
Dans les deux sujets on avait :

Le triangle AIC est isocèle ***et*** rectangle, et ses angles à la base sont égaux à $45°$

donc $\widehat{IAC}=45°$

$$AC^2=5^2+5^2 \quad \text{donc} \quad AC=\sqrt{2\times 5^2}=5\sqrt{2} \quad \text{et} \quad \cos(45°)=\frac{5}{5\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

2) Pour le sujet de rattrapage il s'agissait de calculer $\cos 30°$



$\widehat{BAI}=30°$ et $BI=\frac{5}{2}$

De plus dans le triangle rectangle AIB , on a :

$$AI^2=AB^2-BI^2$$

ce qui donne :

$$AI=\sqrt{5^2-\frac{5^2}{2^2}}=5\sqrt{1-\frac{1}{4}}=5\frac{\sqrt{3}}{2}$$

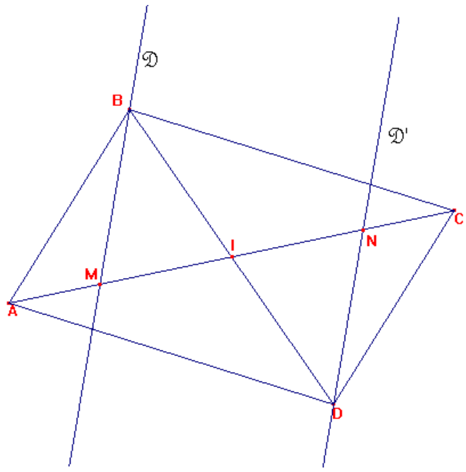
et finalement :

$$\cos 30°=\frac{AI}{AB}=\frac{5\frac{\sqrt{3}}{2}}{5}$$

c'est à dire $\cos 30°=\frac{\sqrt{3}}{2}$

Exercice 4 - parallélisme de deux droites (5 pts)

Sujet A :



$ABCD$ est un parallélogramme et $AM = CN$

1) I est le point d'intersection des diagonales $[AC]$ et $[BD]$ du parallélogramme, c'est donc leur milieu commun

2) B a donc pour image D par la symétrie de centre I

3) La droite (AC) est son propre symétrique par rapport à I
De plus $AM = CN$ et ces deux segments portés par (AC) sont donc symétriques par rapport à I .

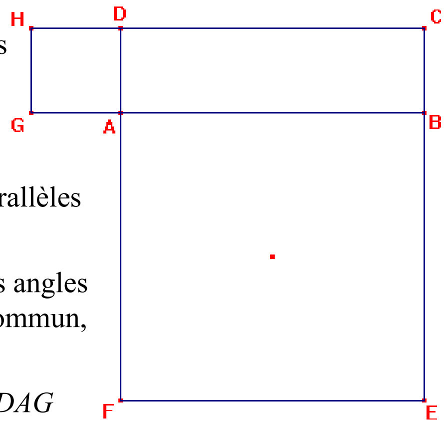
D'autre part, $AI = IC$, c'est à dire $\begin{cases} MI = AI - AM \\ IN = IC - NC \end{cases}$

On a donc $MI = IN$ et M a pour symétrique N par rapport à I

4) Alors l'image de la droite D par la symétrie de centre I est la droite D' car l'image des deux points $\{B, M\}$ de D sont les deux points $\{D, N\}$ de D'

5) Alors par symétrie par rapport à I on a : D//D'

Sujet B :



$ABCD$ est un rectangle, $ADHG$ et $ABEF$ sont des carrés

1) $\widehat{FEA} = 45°$

2) $\widehat{GAH} = 45°$

3) Un carré est un parallélogramme et ses côtés opposés sont parallèles deux à deux, donc (AB) // (EF)

4) Alors (HA) et (AE) coupent deux parallèles en formant des angles égaux et sont donc parallèles. Puisqu'elles ont un point en commun, alors elles sont confondues et les points E, A, H sont alignés.

5) Alors la droite (EA) porte la diagonale $[HA]$ du carré $HDAG$ et est donc perpendiculaire à l'autre diagonale $[GD]$ de ce carré c'est à dire $(EA) \perp (GD)$

Sujet de rattrapage :

Dans la figure précédente on prend $GA = \frac{1}{4} AB$

Et on admet que les points E, I, A, H sont alignés

1) La réciproque du théorème de Thalès permet d'écrire que (GD) // (FB)

2) Puisque les points E, I, A, H sont alignés on a $(GD) \perp (EH)$ et dans le carré ABEF, on a aussi $[FB] \perp [EH]$ c'est à dire $(FB) \perp (EH)$

Alors (GD) et (FB) sont toutes deux perpendiculaires à une même troisième ce qui permet de montrer que (GD) // (FB) par une autre méthode que celle de la première question.

3) La droite (BD) n'est pas parallèle à la droite (EH) car $\widehat{DBA}$ n'est pas égal à $45°$

En effet, si c'était le cas, le triangle DAB serait rectangle et isocèle ce qui est faux puisque $GA = DA = \frac{1}{4} AB$