activité 3B page 61
ordre dans $\mathbb{R}$ - rangement des nombres

Stéphane Foresti - 2^{nde} 10

28 octobre 2006

Sachant que $5 < a < 6$ on veut encadre le réel A donné par :

$$A = \frac{1}{a+1}$$

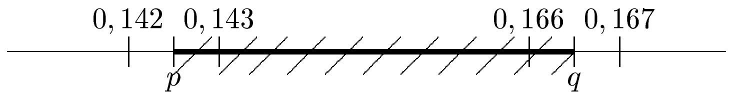
1. valeur exacte de l'encadrement :

$$\left.\begin{array}{l} si\ 5 < a\ alors\ 6 < a+1\ et\ \frac{1}{6} > \frac{1}{a+1} \\ si\ a < 6\ alors\ a+1 < 7\ et\ \frac{1}{a+1} > \frac{1}{7} \end{array}\right\}\ alors\ \frac{1}{7} \simeq 0,142 < A < \frac{1}{6} \simeq 0,167$$

2. On a donc un encadrement à 10^{-3} de $p = \frac{1}{7}$ et $q = \frac{1}{6}$

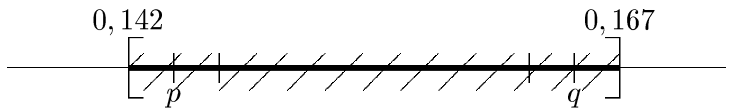
   (a) sur un axe gradué on a :

   (b) l'intervalle exact des solutions est donné par :



   on remarque qu'on ne peut exactement trouver p et q puisque leur suite décimale est infinie : au passage cette suite est périodique puisque p et q s'expriment comme fraction de deux entiers et sont donc des nombres rationnels.

   (c) si on regarde de près le graphique précédent on s'aperçoit que si l'on veut encadrer A *"à coup sûr"* on doit retenir l'intervalle $[0,142\,;\,0,167]$:



   En effet, si on prend l'intervalle $[0,143\,;\,0,166]$ on peut trouver un nombre A compris par exemple entre p et $0,143$. Par exemple si on prend $a = 5,999 < 6$ on a :

$$p \simeq 0,14286 < \frac{1}{a+1} \simeq 0,14287 < 0,143$$

3. Cependant si on se contente d'une approximation de A à 10^{-3} près alors l'intervalle $[0,143\,;\,0,166]$ suffit puisque dans ce cas les réels dans les intervalles $[0,142\,;\,0,143[$ et $]0,166\,;\,0,167]$ sont situés à une distance inférieure à 10^{-3} de ceux de l'intervalle $[0,143\,;\,0,166]$
   On peut alors recommencer la même opération pour des approximations plus ou moins fines de p et q (à 10^{-1} par exemple)