Probabilités

Fiche relue en 2016

I. Vocabulaire

Définitions
- Une expérience est dite **aléatoire** lorsque son résultat est déterminé par le hasard. Il ne peut donc pas être prévu à l'avance avec certitude.
- Un **événement** est un ensemble d'issues (ou de résultats). Un événement est réalisé lorsque l'une des issues (ou résultats) qui le composent est réalisée.
- Un **événement élémentaire** est un événement composé d'une seule issue (ou d'un seul résultat).

Exemple :
« Jeter un dé » est une expérience aléatoire. On ne peut savoir à l'avance le nombre qui va apparaître sur la face supérieure du dé.
On connaît toutes les issues possibles : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
On peut définir l'événement P : « obtenir un nombre pair ». L'événement P est constitué des issues 2, 4 et 6.
L'évènement « obtenir 5 » est un événement élémentaire.

Définition
L'**événement contraire** d'un événement A est celui que se réalise lorsque A ne se réalise pas.
On le note $\overline{A}$ qui se lit "A barre" ou "événement contraire de A".

Exemple :
Soit M l'événement : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
L'événement « ne pas obtenir un multiple de 3 » est l'événement contraire de M. On le note $\overline{M}$.

Exemple :
Dans une urne, il y a 3 boules vertes, 5 boules bleues et 7 boules blanches.
Tirer au hasard une boule dans l'urne et noter sa couleur est une expérience aléatoire.
On note B l'évènement « la boule tirée est blanche ».
L'évènement « la boule tirée n'est pas blanche » est l'événement contraire de B. On le note $\overline{B}$.

Définitions
- Un événement est dit **impossible** s'il ne peut pas se produire.
- Un événement est dit **certain** s'il se produit nécessairement.

Exemple :
On jette un dé équilibré à 6 faces. On regarde le nombre qui apparaît sur la face supérieure du dé.
Les issues possibles sont : 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 et 6.
L'événement « obtenir le chiffre 7 » est un événement impossible.
L'événement « obtenir le chiffre 1, 2, 3, 4, 5 ou 6 » est un événement certain.

Définition
Deux événements sont dits **incompatibles** s'ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

Exemple :
Soit P l'événement « obtenir un nombre pair » et soit T l'événement « obtenir 3 ».
Les événements P et T sont incompatibles : ils ne peuvent pas se réaliser en même temps.

II. Notion de probabilité

Définition

Quand une expérience aléatoire est répétée un très grand nombre de fois, la fréquence relative de réalisation d'un événement élémentaire se rapproche d'une valeur particulière : la probabilité de cet événement élémentaire.

Exemples :

- La probabilité d'obtenir « pile » lors du jet d'une pièce est égale à $\frac{1}{2}$ ou 0,5.
- Dans un collège, on a interrogé les élèves sur le nombre d'enfants dans leur famille.

Nombre d'enfants	1	2	3	4	5	6 et plus
Effectif	18	25	20	11	5	3
Fréquence (en %)	21,95	30,49	24,39	13,41	6,1	3,66

On choisit un élève au hasard dans le collège.
La probabilité pour que cet élève appartienne à une famille de trois enfants est approchée par la fréquence correspondante, soit $\frac{24,39}{100}$ ou 0,2439.

Définition

La **probabilité** d'un événement est définie comme la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Propriétés (admises)

- Quel que soit l'événement A, on a : $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$.
- La probabilité d'un événement certain est égale à 1.
- La probabilité d'un événement impossible est égale à 0.
- La somme des probabilités des événements élémentaires est égale à 1.
- Lorsque deux événements sont incompatibles, la probabilité que l'un ou l'autre se réalise est égale à la somme de leurs probabilités : P(A ou B) = P(A) + P(B)

Exemple :
Dans l'expérience du jeu de dé à 6 faces, on appelle :
A l'événement élémentaire : « obtenir un 1 » ; B l'événement élémentaire « obtenir un 2 »,
C l'événement élémentaire : « obtenir un 3 » ; D l'événement élémentaire « obtenir un 4 »,
E l'événement élémentaire : « obtenir un 5 » ; F l'événement élémentaire « obtenir un 6 ».

- Chaque face a la même chance d'apparition, donc :

$\mathrm{p(A) = p(B) = p(C) = p(D) = p(E) = p(F)} = \frac{1}{6}$

On a : $\mathrm{p(A) + p(B) + p(C) + p(D) + p(E) + p(F)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = 1$

- Soit l'événement M « obtenir un multiple de 3 ». L'événement M est réalisé si la face obtenue est 3 ou 6.

On a alors : $\mathrm{p(M) = p(C) + p(F)} = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Les événements M et E sont incompatibles. Donc la probabilité d'obtenir 5 ou un multiple de 3 est égale à :
$\mathrm{p(E\ ou\ M) = p(E) + p(M)} = \frac{1}{6} + \frac{2}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$

Définition

Si tous les événements élémentaires ou éventualités d'une expérience aléatoire ont la même probabilité, on dit que les événements élémentaires sont équiprobables ou qu'il y a équiprobabilité.

Propriété (admise)

Dans une situation d'équiprobabilité, la probabilité d'un événement A est égale au quotient du nombre de cas favorables par le nombre de cas possibles.

Exemple :

Soit l'évènement M « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé.
Toutes les faces ayant la même chance d'apparition, il y a équiprobabilité.
L'événement M est constitué de 2 événements élémentaires, il y a 2 cas favorables pour réaliser M sur 6 cas possibles. Donc p(M) $= \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Propriété (admise)

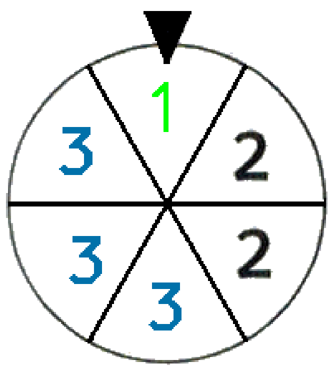
La somme des probabilités d'un événement A et de son contraire est 1 , cela s'écrit :

$p(A) + p(\overline{A}) = 1$.

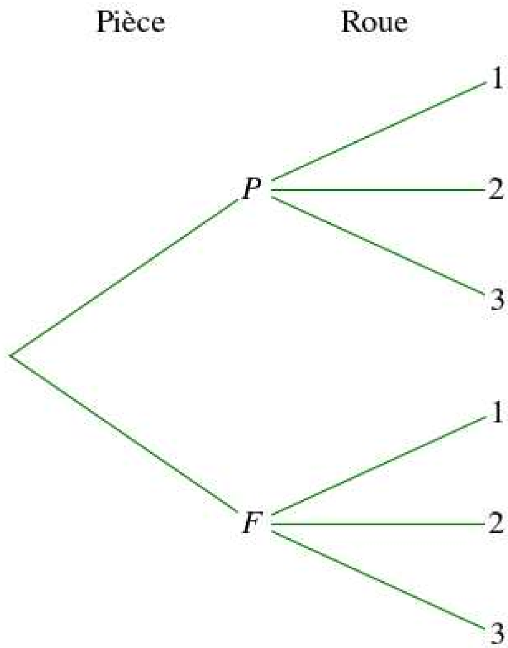
Exemple :
Soit l'événement M : « obtenir un multiple de 3 » dans un jeu de dé. L'événement $\overline{M}$ est : « ne pas obtenir un multiple de 3 » ou encore « obtenir 1, 2, 4 ou 5 ».
Pour réaliser l'événement « non M », il y a 4 cas favorables équiprobables, donc $p(\overline{M}) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$.
On a aussi : $p(\overline{M}) = 1 - p(M)$, donc $p(\overline{M}) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

III. Expériences aléatoires à deux épreuves

Exemple :
On joue à Pile (P) ou Face (F) avec une pièce bien équilibrée. Ensuite, on fait tourner la roue bien équilibrée ci-dessous et on relève le numéro du secteur qui s'arrête face au repère.

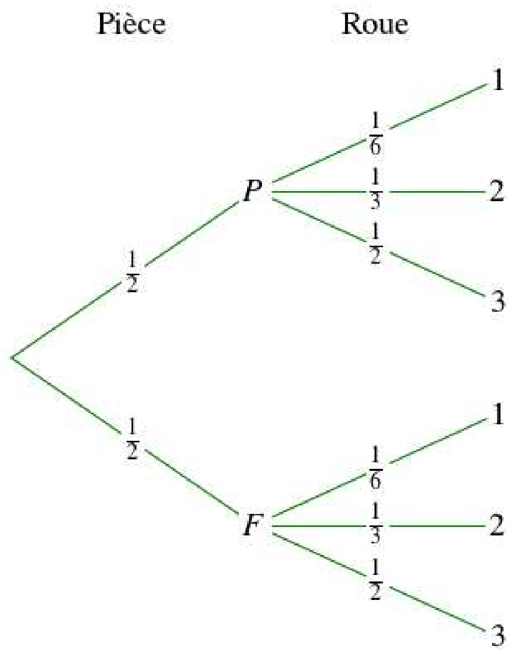


Arbre des possibles :



6 issues sont possibles :
(P ; 1) (P ; 2) (P ; 3) (F ; 1) (F ; 2) (F ; 3)

Arbre pondéré par les probabilités :



On admet que la probabilité d'obtenir l'issue (P ; 1) est égale au produit des probabilités $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{6}$ rencontrées successivement sur les branches menant à l'issue (R ; 1).

Propriété (admise)
La probabilité d'un résultat d'une expérience à deux épreuves est égale au produit des probabilités figurant sur la branche de l'arbre conduisant à ce résultat.