Corrigé Contrôle Commun Mathématiques durée : 2 heure Seconde Janv2009

Exercice 1 (6 points) « Fonction »

Soit f la fonction définie sur [-1 ; 5] par : $f(x) = x^2 - 4x - 1$

1) Compléter le tableau en annexe suivant à l'aide du MENU TABLE :
2) Tracer la courbe représentative (C) de f dans le repère (O,I, J) en annexe !
3) a)Déterminer par le calcul, les images par f de $(2+\sqrt{5})$ et de $(2-\sqrt{5})$

   $f(2+\sqrt{5})=(2+\sqrt{5})^2 - 4(2+\sqrt{5}) - 1$

   $= 4 + 4\sqrt{5} + 5 - 8 - 4\sqrt{5} - 1 = 0$

   et $f(2-\sqrt{5})=(2-\sqrt{5})^2 - 4(2-\sqrt{5}) - 1$

   $= 4 - 4\sqrt{5} + 5 - 8 + 4\sqrt{5} - 1 = 0$

   b) En déduire le tableau de signes de la fonction f sur [-1 ; 5].

   D'après le graphique f s'annule pour deux valeurs et d'après le 3a)

   Ces deux valeurs sont : $(2+\sqrt{5})$ et de $(2-\sqrt{5})$:

   De plus f(x)>0 lorsque la courbe est au-dessus de l'axe des abscisses

   f(x)< 0 au-dessous

x	- 1		$2-\sqrt{5}$		$2-\sqrt{5}$		5
f(x)		+	0	-	0	+	

4) a) Démontrer que, pour tout réel x, on a $f(x) = (x-2)^2 - 5$

   on a $(x-2)^2 - 5 = x^2 - 4x + 4 - 5 = x^2 - 4x - 1$

   donc $f(x) = (x-2)^2 - 5$ pour tout réel x

   b) Déterminer par le calcul, les antécédents par f de 4.

   Prenons l'expression précédente :

   $(x-2)^2 - 5 = 4$

   $(x-2)^2 - 9 = 0$ (identité remarquable)

   $(x-2+3)(x-2-3) = 0$

   $(x+1)(x-5) = 0$

   $\Leftrightarrow$ $x+1 = 0$ ou $x - 5 = 0$ soit $x = -1$ ou $x = 5$

   les antécédents de 4 par f sont (– 1) et 5 (on connaissait déjà les réponses)

5) a) Graphiquement, le minimum de f sur [-1 ; 5] est - 5

   et il est atteint pour x= 2

   b) on sait que $f(x) = (x-2)^2 - 5$

   or $(x-2) \geq 0$ donc $(x-2)^2 - 5 \geq -5$ d'où

   $f(x) \geq -5$ par définition, - 5 est donc le minimum de f sur [-1 ; 5] et comme $f(2) = (2-2)^2 - 5 = -5$ il est atteint en 2 !

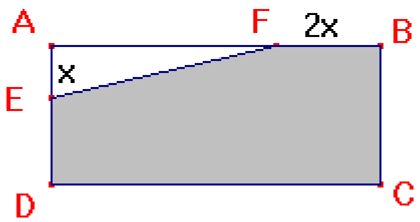
c) En déduire le tableau de variations de la fonction f sur [-1 ; 5].

Du graphique , on a :

x	-1		2		5
f(x)	4	↘	-5	↗	4

Exercice 2 : (4 *points*) *«utilisation de la calculatrice graphique »*

Soit ABCD un rectangle tel que AB = 12 (cm) et AD = 5 (cm).
E est un point du segment [AD] tel que AE = x
et F est un point du segment [AB] tel que BF = 2x. (x est en centimètres).



Donne t-on la figure ?

1°) Les valeurs possibles de x se situent dans l' intervalle :

a) [0 ; 12] ; b) [0 ; 5] ; c) [0 ; 6]

c'est une distance donc $x \geq 0$ et AD = 5 et E un point de [AD] donc $x \leq 5$

2°) a) l A(x) = aire $_{ABCD}$ - aire$_{AEF}$

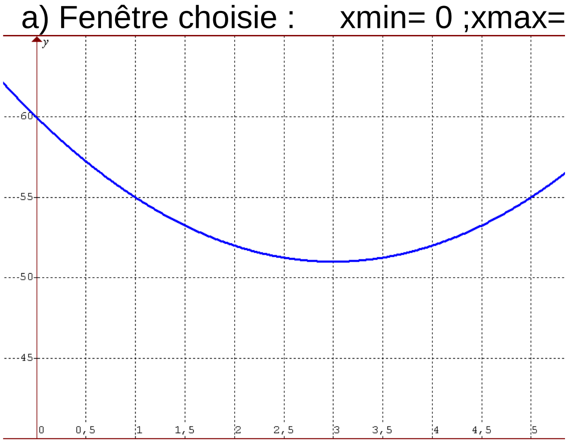
$$= 12\times5 \quad - \frac{1}{2}\,(x\times(12-2x)) = 60 - 6x + 2x^2$$

soit $A(x) = 2x^2 - 2x + 60$

b) $(x-3)^2 + 51 = x^2 - 6x + 9 + 51 = x^2 - 6x + 60 = A(x)$

3°) En utilisant l'expression donnée au 2°)b) et à l'aide de votre calculatrice graphique :

a) Fenêtre choisie : xmin= 0 ;xmax= 5 ; ymin = 40 y max = 65



b) Sur [0 ; 5] , le maximum de A est 60 atteint pour x = 0 (normal !)

le minimum de A est 51 atteint pour x =3 l'aire du polygone BCDEF est minimale est donc de 51 cm² pour AE = 3 cm

---

Exercice3 (2 points) « limite de la calculatrice et calcul algébrique » !

1) le résultat affiché par votre calculatrice du nombre : A = $\dfrac{\left(4+10^{-50}\right)^2-16}{10^{-50}}$ est 0.

2) $\dfrac{(4+x)^2-16}{x}=\dfrac{16+8x+x^2-16}{x}=\dfrac{8x+x^2}{x}=8+x$ pour $x \neq 0$

3)a) la valeur exacte du nombre A est , en prenant x = 10^{-50} , A = 8 + 10^{-50}.

b) l'erreur commise par votre calculatrice :

lors du calcul de 4 + 10^{-50} la calculatrice arrondie à 4 .

Exercice 4 (3 points) « Les vecteurs »

Soit ABC (un triangle la figure est donnée en annexe).

1. Placer les points I, J et K tels que : $\overrightarrow{BI} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{AJ} = \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AK} = \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

2. a) Montrer que $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IB} + \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AJ} = -\dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB}$

$= -\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{AC}) + \overrightarrow{BA} + \dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} = \ldots\ldots\ldots = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.

b) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{JK}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{JK} = \overrightarrow{JA} + \overrightarrow{AK} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

c) Pour démontrer que les points I, J et K sont alignés, montrons que les vecteurs $\overrightarrow{IJ}$ et $\overrightarrow{JK}$ sont colinéaires :

du a) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \dfrac{1}{2}\overrightarrow{AC}$ et du b) $\overrightarrow{JK} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \dfrac{3}{4}\overrightarrow{AC}$

ainsi on déduit : $\overrightarrow{JK} = -\dfrac{3}{2}\overrightarrow{IJ}$

Ce qui démontre que les points I, J et K sont alignés.

d) Soit $\vec{u}$ un vecteur quelconque tel que : $\vec{u} = \dfrac{5}{7}\overrightarrow{AB} + x.\ \overrightarrow{AC}$.

Pour que le vecteur $\vec{u}$ soit colinéaire au vecteur $\overrightarrow{IJ}$, il faut :

Il existe un réel k tel que : $\vec{u} = k\ \overrightarrow{IJ}$ or $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

Soit $\frac{5}{7}\overrightarrow{AB} = k\times\ \overrightarrow{AB}$ et $x\ .\overrightarrow{AC} = k \times (-\frac{1}{2})\overrightarrow{AC}$

Donc $k = \frac{5}{7}$ et ainsi $x = -\frac{5}{7}\times\frac{1}{2} = -\frac{5}{14}$

<u>Exercice 5 « Les Nombres»</u>
<u>Partie 1 (3 points)</u>
1) 7*n* + 21 = 7(n + 3) de fait A(n) n'est pas premier car divisible par 7
donc n'admet pas exactement deux diviseurs !
2) On pose le nombre B(n) = 6*n* + 5 pour tout entier naturel *n* .
a) B(27) = 167 et B(44)= 269 sont premiers car :
$\sqrt{167}$ ~12,9 < 13
or 167 n'est divisible par 2 ;3 ;5 ;7 ;et 11
donc comme aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{167}$ ne divise 167 : 167 est premier !
$\sqrt{269}$ ~16,4 < 17
or 269 n'est divisible par 2 ;3 ;5 ;7 ;11 et 13
donc comme aucun nombre premier inférieur à $\sqrt{269}$ ne divise 269 : 269 est premier !

b) B(33) = 203
or 203 est divisible par 7 donc il n'est pas premier !
c) 1. 6 x + 5 = 397 ⇔ 6x = 392 ⇔ x= 392/6 soit x= 196/3
sachant que 196 n'est pas divisible par 3 alors la solution n'est pas un entier
donc il n'existe pas d'entier naturel n tel que B(n) = 397.
3. Existe-t-il un entier naturel n tel que B(n) = 389 ?
4. 6n + 5 = 389 ⇔ 6n = 384 ⇔ n = 384 /6 soit n = 64 donc oui
5. B(64) est un nombre premier !

<u>Partie 2 (2 points)</u>
1) $196 = 2^2\times7^2$ et $126 = 2\times3^2\times7$
2) A l'aide des résultats précédents:
a) Rendre la fraction $\frac{196}{126} = \frac{2^2\times7^2}{2\times3^2\times7} = \frac{14}{9}$ c'est un rationnel car quotient de deux entiers qui ne peut se mettre sous la forme $a\times10^p$!
b) D'après le 1) $196\times126 = 2^3\times3^2\times7^3$

c) Pour que le nombre $196\times126\times k$ soit un carré il faut que sa décomposition soit de la forme : $2^n\times3^2\times7^m$ avec n et m pair
donc par exemple le plus petit est : $2^4\times3^2\times7^4$ d'où k = 14.

Tableau de l'exercice 1

x	-1	0	1	2	3	4	5
$f(x)$	4	-1	-4	-5	-4	-1	4

Repère de l'exercice 1

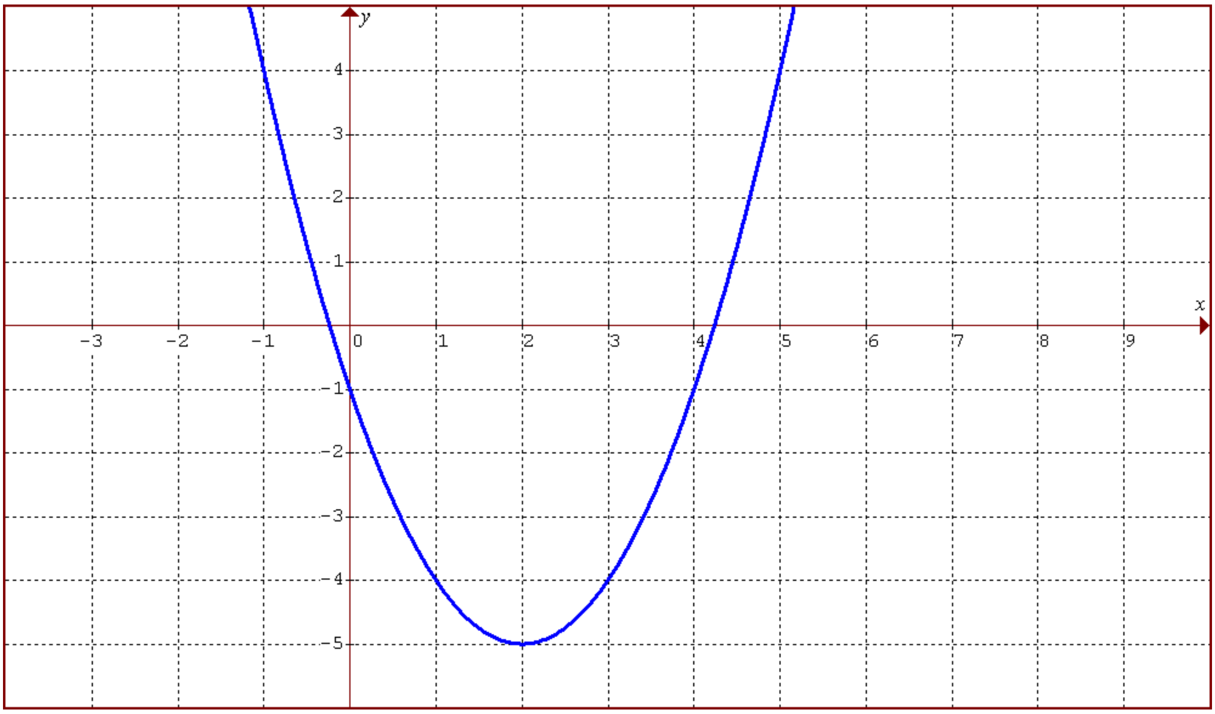


Figure de l'exercice 2