Second degré, cours, première S

1 Fonctions polynômes et polynômes du second degré

Définition :

- On appelle *Fonction polynôme* toute fonction définie sur .... par ....
- l'entier naturel n est appelé .... de la fonction polynôme ;
- les nombres a_0, a_1, ..., a_n sont appelés .... de la fonction polynôme f ;
- les expressions $a_p x^p$ avec $0 \leq p \leq n$ sont appelés .... de la fonction polynôme.

Cas particuliers :

- Toute fonction affine est une fonction polynôme .... ;
- toute fonction f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ où a, b et c sont des nombres réels fixés et $a \neq 0$ est une .... (on dit aussi ....).

Exemples :

$P(x) = x^2$
$Q(x) = x^2 - 2x + 3$
$R(x) = (x-1)(x-3)$

Propriété et définition :

Pour toute fonction *polynôme du second degré* f définie par $f(x) = ax^2 + bx + c$ avec $a, \quad b, \quad c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, on a :

....

où

$$\alpha = ...$$

et

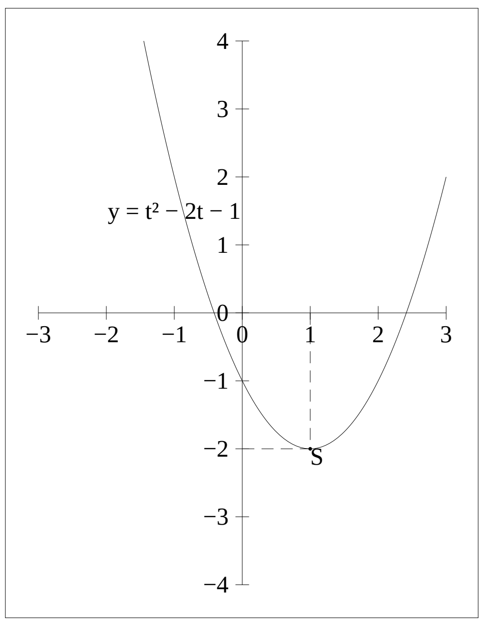
$$\beta = ...$$

Cette écriture est appelée .... de la fonction f.

Preuve :
On a :

$$\begin{aligned} f(x) &= ax^2 + bx + c \\ &= ... \\ &= ... \\ &= ... \end{aligned}$$

Remarque :
Dans un repère $(O; \vec{i}; \vec{j})$ du plan, la forme canonique montre que la représentation graphique de la fonction trinôme du second degré f est .... dont le point S de coordonnées .... est le sommet.



Exemple :
Soit f la fonction définie par $f(x) = 3x^2 - 6x + 1$. On a :

$$f(x) = ...$$
$$f(x) = ...$$
$$f(x) = ...$$

donc le point S de coordonnées $(1; -2)$ est le sommet de la parabole représentant la fonction f.

2 Equations du second degré

Définition :

- Toute solution de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ est appelée .... du trinôme f défini par $f(x) = ax^2 + bx + c$ pour tout x réel.
- On appelle *discriminant* du trinôme le réel Δ défini par ....

Exemple :
2 est une racine de $2x^2 - 5x + 2$.
Le discriminant du trinôme $2x^2 - 5x + 2$ est $\delta = ...$

Remarque :
Ne pas oublier d'ordonner les termes du trinôme avant de calculer le discriminant.

Propriété :

Soit $\Delta =$ .... le discriminant du trinôme du second degré $ax^2 + bx + c$.

- Si $\Delta < 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....
- Si $\Delta = 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....
- Si $\Delta > 0$, alors l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ ....

Preuve :
On a vu auparavant que $f(x) = a((x - \alpha)^2 + \beta)$ où $\alpha =$ .... et $\beta =$ ....
On a $f(x) = 0$ qui s'écrit encore, puisque $a \neq 0$, ...
Donc $(x - \alpha)^2 =$ ....
On reconnaît le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$.

- si $\Delta < 0$, comme le premier membre $(x - \alpha)^2$ est ...., l'équation ....;
- si $\Delta = 0$, l'équation s'écrit $(x - \alpha)^2 = 0$ donc .... est l'unique solution ;
- si $\Delta > 0$, l'équation donne $x - \frac{b}{2a} =$ .... ou $x - \frac{b}{2a} =$ ....
  donc $x =$ ....
  ou $x =$ ....
  d'où les deux solutions x_1 et x_2 en simplifiant.

2.1 Factorisation des fonctions trinômes du second degré

Propriété :

> Avec les mêmes notations que précédemment, on a pour $f(x) = ax^2 + bx + c$:
> - si $\Delta < 0$, $f(x)$ .... ;
> - si $\Delta = 0$, $f(x) =$ .... ;
> - si $\Delta > 0$, $f(x) =$ .... où x_1 et x_2 sont les deux racines distinctes du trinôme.

Preuve :
Contenue dans la preuve précédente.

3 Inéquations du second degré

Propriété :

> Avec les mêmes notations que précédemment,
> - si $\Delta < 0$, $f(x)$ est du signe de .... sur $\mathbb{R}$ et .... ;
> - si $\Delta = 0$, $f(x)$ est du signe de .... sur $\mathbb{R}$ et .... ;
> - si $\Delta > 0$, $f(x)$ est du signe de .... à l'extérieur des racines x_1 et x_2 et du signe opposé à l'intérieur.

Preuve :
Conséquence immédiate des factorisations obtenues au paragrpahe précédent.

Exemple :
Résolution de $\frac{-x^2+6+7}{x+2} \geq 0$.

$x + 2 = 0$ équivaut à .... donc .... est la seule valeur interdite.

Résolution de $-x^2 + 6x + 7 = 0$. On a $\Delta =$ .... $\Delta > 0$ donc l'équation admet deux solutions distinctes $x_1 =$ .... et $x_2 =$ ....

Étude de signe :

x	$-\infty$		...		...		...		$+\infty$
$x+2$		...	...	...		...		...	
$-x^2+6x+7$		...		...	...	...	...	....	
$\frac{-x^2+6x+7}{x+2}$		...	...	...	...	...	...	...	

Donc $S =$ ....

4 Interprétation graphique

Propriété :

Les solutions de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$ sont ....

Interprétation :

- Si $\Delta > 0$, la courbe .... ;
- si $\Delta = 0$, la courbe .... ;
- si $\Delta < 0$, la courbe ....

En outre, si $a > 0$, la parabole a ses branches tournées .... et tournées .... si $a < 0$.