

# Chapitre 12 - Le choix d'un portefeuille

## Plan

- ♦ le choix de portefeuille et l'optimisation de portefeuille
- ♦ combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque
  - la droite de couple risque-rentabilité
  - le portefeuille efficient
- ♦ combinaison de deux actifs risqués
  - le degré de corrélation des rentabilités des deux actifs
  - la frontière efficiente
- ♦ Stratégie de portefeuille
  - la combinaison optimale d'actifs risqués
  - les proportions actif risqué / actif sans risque

## Le choix de portefeuille

- ♦ Montre comment un individu doit allouer sa richesse entre différents actifs (maison, actions, obligations, voiture, etc...) et dettes (crédit à la consommation, emprunt étudiant, crédit immobilier...)
- ♦ Il n'y a pas une stratégie unique, chaque individu ayant des préférences ; en revanche, il existe des *principes* généraux.
- ♦ Toute stratégie d'investissement repose sur un arbitrage entre la *rentabilité* et le *risque*. On parle de **couple risque-rentabilité**.

## Il n 'existe pas de stratégie d 'investissement unique

- ♦ Les intérêts sont différents selon les individus
  - s 'endetter pour accéder à la propriété a un sens...
  - s 'assurer sur la vie a un sens...
    - compte tenu de l 'âge
    - de la situation familiale
    - des revenus
    - etc.
  
- ♦ Les horizons d 'investissement sont différents
  - Horizon de planification
  - Horizon de décision
  - Horizon de transaction
  
- ♦ La tolérance (ou l 'aversion) au risque varient selon les individus

# Un portefeuille : une combinaison d'actifs

## Optimisation de portefeuille :

- ♦ démarche de combinaison de plusieurs actifs, risqués ou non risqués, dans le but de dégager la rentabilité la plus élevée possible, à risque constant

## Deux étapes

- ♦ constituer un portefeuille d'actifs risqués, qui soit une *combinaison optimale* d'actifs risqués
- ♦ mixer ce portefeuille avec un actif sans risque

## Démarche

- ♦ Nous allons supposer que le portefeuille d'actifs risqués est déjà constitué (nous y reviendrons).

## Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque

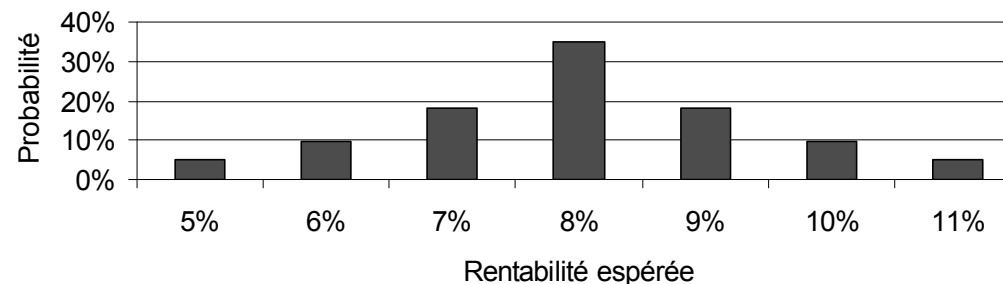
### Actif sans risque :

- titre qui offre un taux de rentabilité *parfaitement certain* sur l'horizon de décision de l'investisseur.

### Actif risqué :

- titre qui offre une **espérance de rentabilité** (c'est-à-dire une *moyenne*), avec une **incertitude** (mesurée par l'*écart-type*).
- Exemple : « cette action me rapportera du 8% +/- 3% »

Distribution de probabilité de l'action NRV



## Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque

### Exemple :

- ♦ actif sans risque = emprunt d'Etat
- ♦ actif risqué = action de la société KC

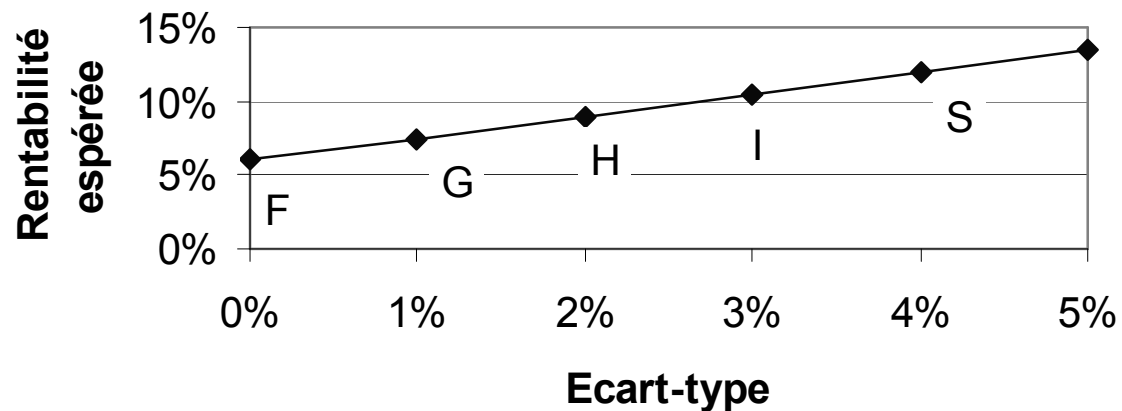
	Rentabilité espérée	Ecart-type
Emprunt d'Etat	6%	0%
Action KC	12%	4%

- ♦ Portefeuille constitué à 100% de l'emprunt d'Etat : rentabilité ? Écart-type ?
- ♦ Portefeuille constitué à 100% de l'action KC : rentabilité ? Écart-type ?

## Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque

Portefeuille	Proportion d'actif risqué	Proportion d'actif sans risque	Rentabilité espérée	Ecart-type
F	0%	100%	6.0%	0.0%
G	25%	75%	7.5%	1.0%
H	50%	50%	9.0%	2.0%
I	75%	25%	10.5%	3.0%
S	100%	0%	12.0%	4.0%
	125%	-25%	13.5%	5.0%

### Droite de couple risque-rentabilité



## Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque

### Formule de la droite de couple risque-rentabilité :

- soit  $w$  la proportion investie en actif risqué,  $(1-w)$  la proportion investie en actif sans risque
- Soit  $E(r_a)$  l'espérance de rentabilité de l'action risquée,  $E(r_p)$  l'espérance de rentabilité du portefeuille,  $r_f$  le taux sans risque

$$E(r_p) = wE(r_a) + (1-w)r_f$$

$$E(r_p) = r_f + w \cdot [E(r_a) - r_f]$$

**Chaque portefeuille rapporte le taux sans risque,  
plus une prime de risque = (pondération x prime de risque de l'actif risqué)**

**Exemple :** pondération  $w$  du portefeuille qui rapporte du 10 % ?

$$10\% = 6\% + w \cdot [12\% - 6\%] \Leftrightarrow w = (10\% - 6\%) / (12\% - 6\%) = 66,7\%$$



## Combinaison d'un actif risqué et d'un actif sans risque

### Rappel

- on a la formule de la droite de couple risque-rentabilité (rentabilité du portefeuille constitué d'un actif risqué et d'un actif sans risque)

$$E(r_p) = r_f + w \cdot [E(r_a) - r_f] \quad (1)$$

- Quel est l'écart-type du portefeuille ?

$$\sigma_p = w \cdot \sigma_a + (1 - w) \cdot 0$$

$$\sigma_p = w \cdot \sigma_a$$

- Comme on a  $w = \sigma_p / \sigma_a$ , en remplaçant dans l'équation (1), on a :

$$E(r_p) = r_f + \frac{E(r_p) - r_f}{\sigma_a} \cdot \sigma_p$$

# Le portefeuille efficient

## Portefeuille efficient

- ♦ le portefeuille qui offre la meilleure rentabilité pour un niveau de risque donné

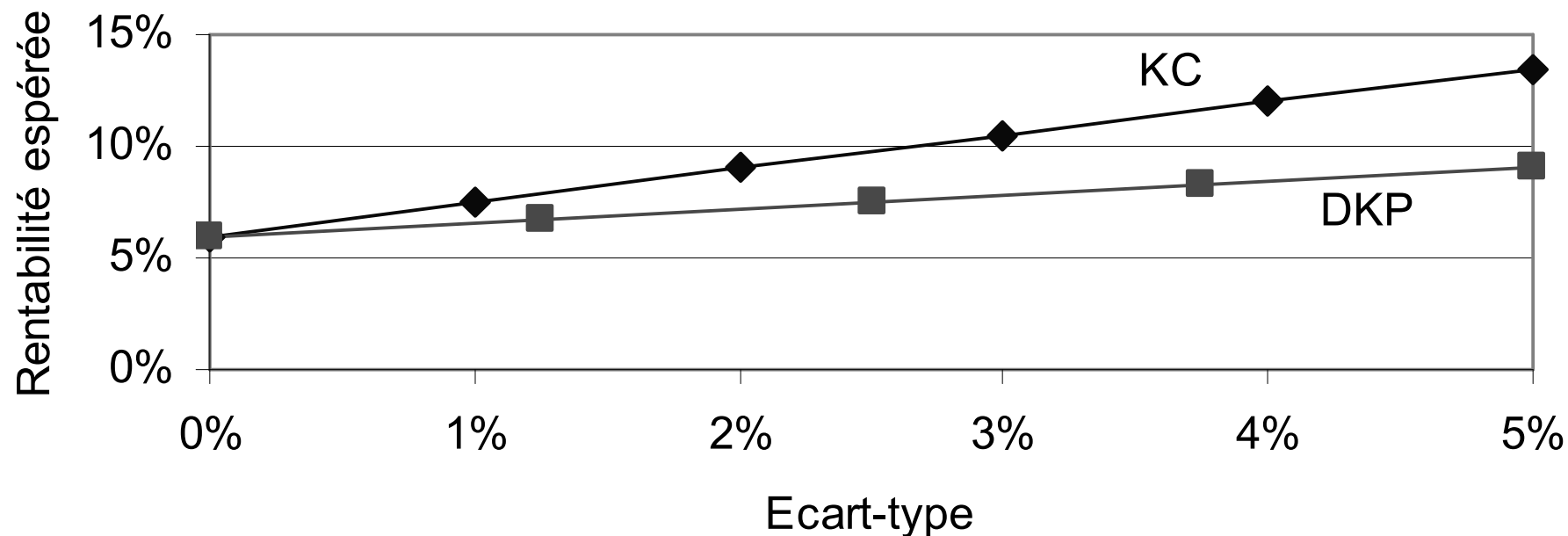
## Exemple :

- ♦ en sus de l'action KC (Cf. précédemment), on peut investir dans l'action DKP

	<b>Rentabilité espérée</b>	<b>Ecart-type</b>
Emprunt d'Etat	6%	0%
Action KC	12%	4%
Action DKP	9%	5%

## Le portefeuille efficient

Combinaison de l'actif sans risque avec l'action KC  
et l'action DKP



Le portefeuille combinant DKP est inefficent

## L 'actif risqué

- Nous avons supposé qu'il existait un actif risqué, optimal, que nous avons mixé avec un actif sans risque. Le résultat s'appelle la droite de couple risque-rentabilité.
- Mais l'actif risqué est lui-même un **portefeuille d'actifs risqués**.
- Recherchons le *portefeuille optimal* d'actifs risqués.
- Prenons deux actifs risqués : l'action KC, l'action DKP

	<b>Rentabilité espérée</b>	<b>Ecart-type</b>
Action KC	12%	4%
Action DKP	9%	5%

## Combinaison de deux actifs risqués

- Rentabilité du portefeuille constitué des deux actifs risqués :

$$E(r_p) = wE(r_{a1}) + (1-w) E(r_{a2})$$

- Ecart-type au carré (ou *variance*) du portefeuille constitué des deux actifs risqués :

$$\sigma_p^2 = w^2 \cdot \sigma_{a1}^2 + (1 - w)^2 \cdot \sigma_{a2}^2 + 2w(1 - w)\rho\sigma_{a1}\sigma_{a2}$$

→  $\rho$  représente le coefficient de corrélation entre les rentabilités des deux actifs.

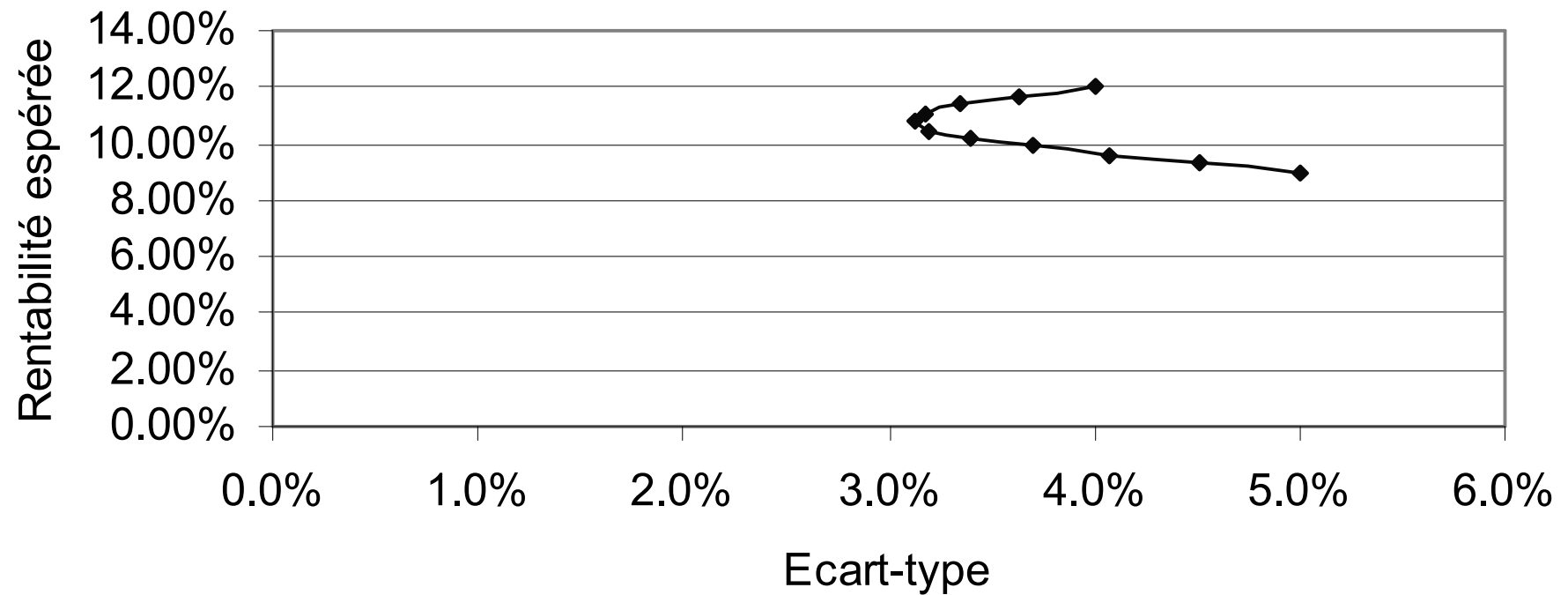
- $\rho = 1$  : les rentabilités des deux actifs sont parfaitement corrélées
- $\rho = 0$  : il n'y a aucune corrélation entre les rentabilités des deux actifs
- $\rho = -1$  : les rentabilités des deux actifs évoluent inversement l'une de l'autre

## Exemple 1 : deux actifs non corrélés ( $r = 0$ )

Proportion actif 1	Proportion actif 2	$E(r_p)$	$S_p$
0%	100.00%	9.00%	5.00%
10%	90.00%	9.30%	4.52%
20%	80.00%	9.60%	4.08%
30%	70.00%	9.90%	3.70%
40%	60.00%	10.20%	3.40%
50%	50.00%	10.50%	3.20%
60%	40.00%	10.80%	3.12%
70%	30.00%	11.10%	3.18%
80%	20.00%	11.40%	3.35%
90%	10.00%	11.70%	3.63%
100%	0.00%	12.00%	4.00%

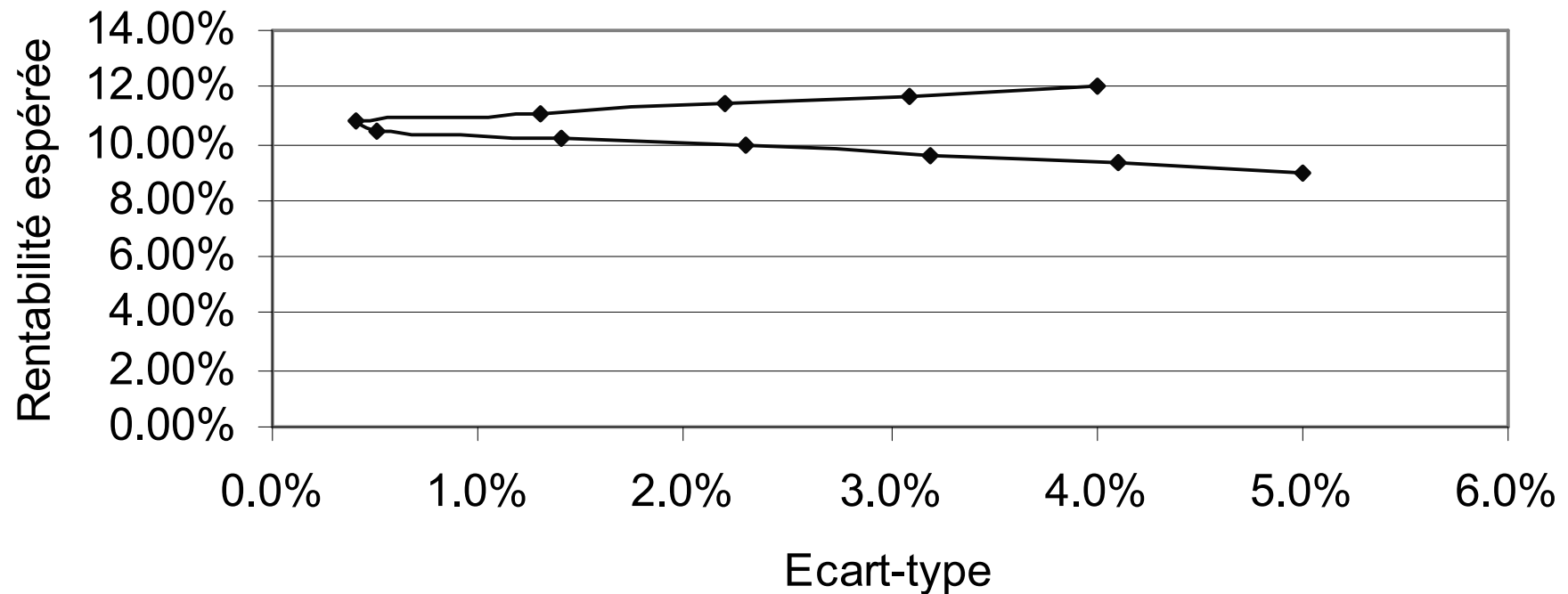
## Exemple 1 : deux actifs non corrélés ( $r = 0$ )

Couple risque-rentabilité avec deux actifs risqués



## Exemple 2 : deux actifs inversement corrélés ( $r = -1$ )

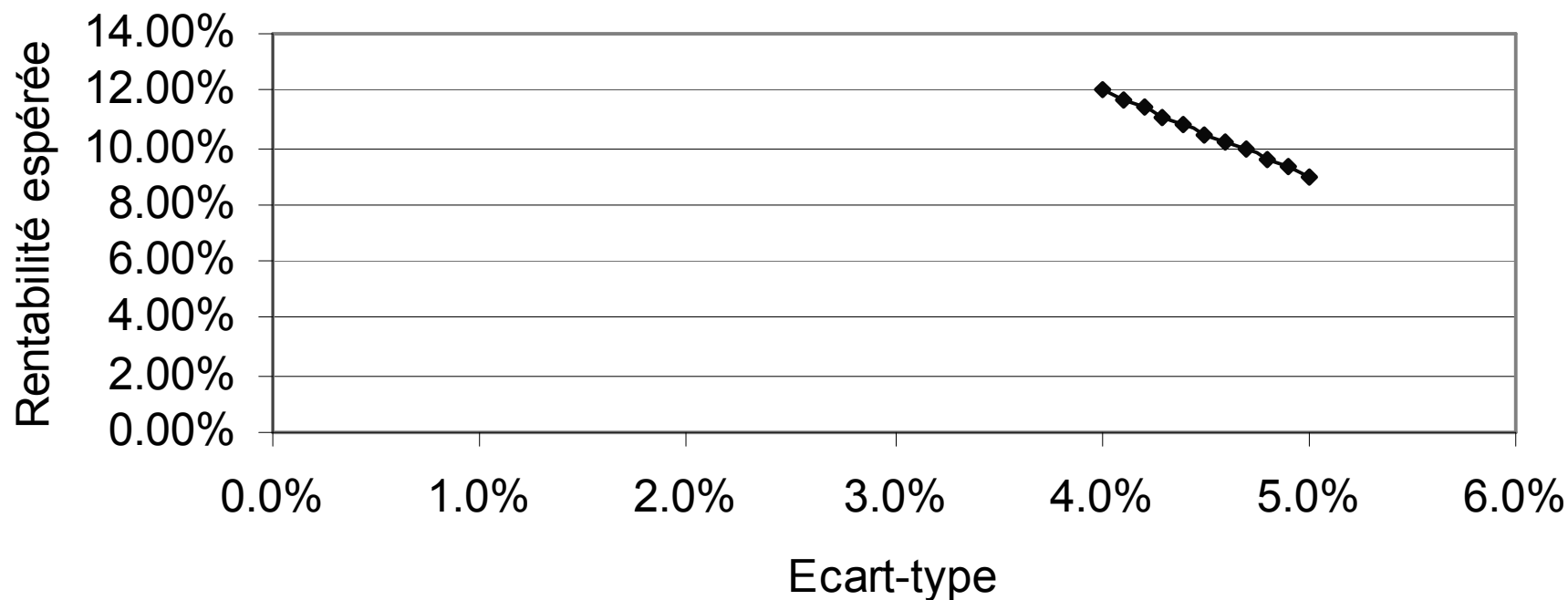
Couple risque-rentabilité avec deux actifs risqués





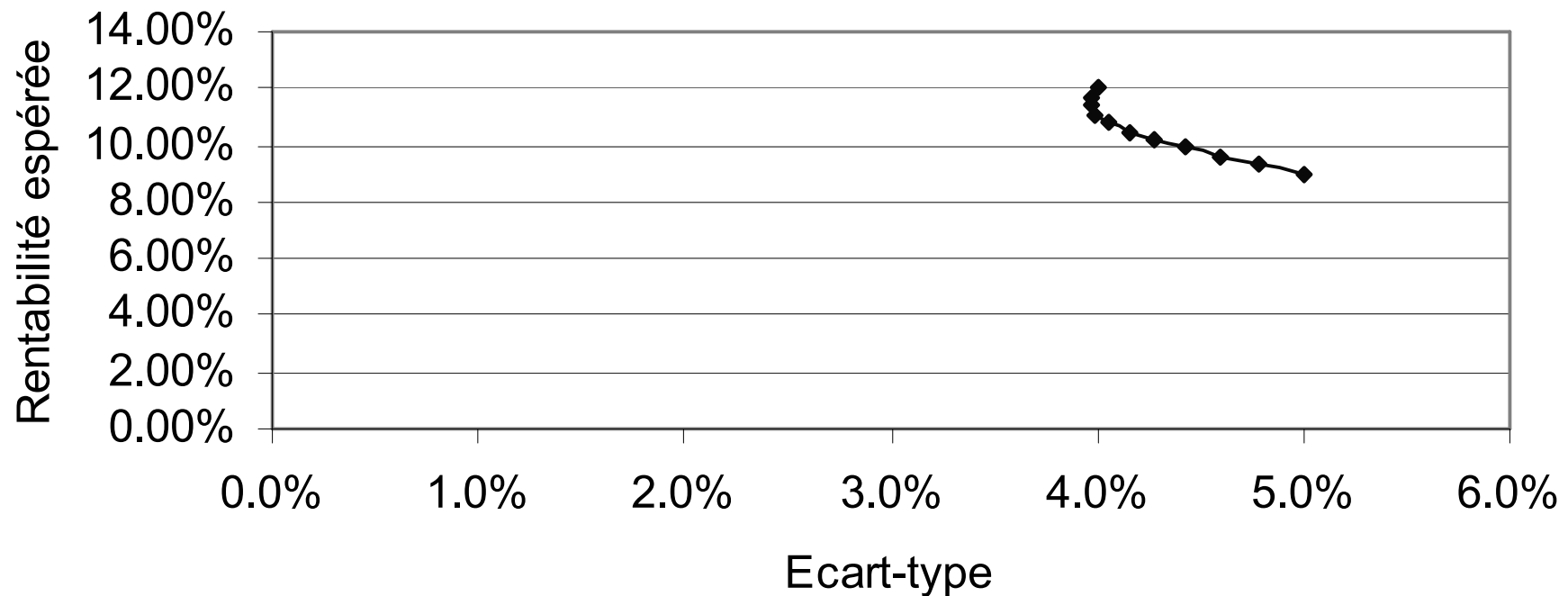
### Exemple 3 : deux actifs parfaitement corrélés ( $r = 1$ )

Couple risque-rentabilité avec deux actifs risqués



## Exemple 4 : deux actifs presque parfaitement corrélés ( $r = 0.7$ )

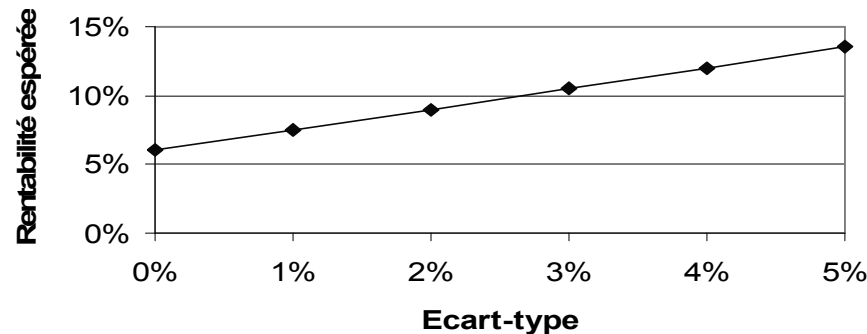
Couple risque-rentabilité avec deux actifs risqués



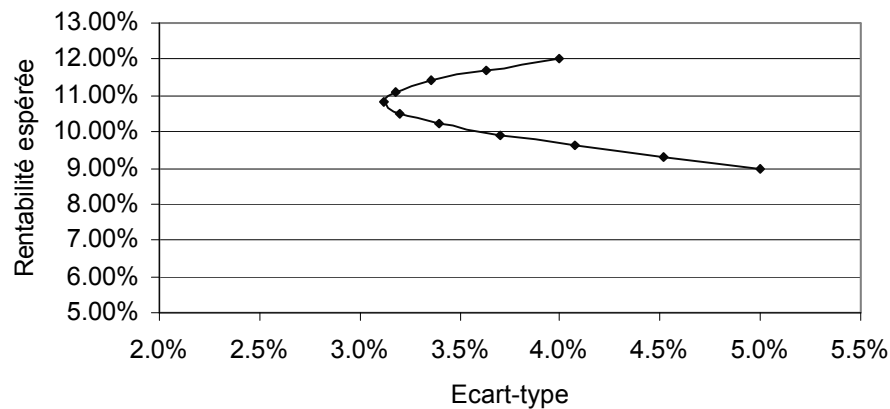
Même avec une corrélation positive, le portefeuille peut être moins risqué que chacun des deux actifs

## Récapitulation

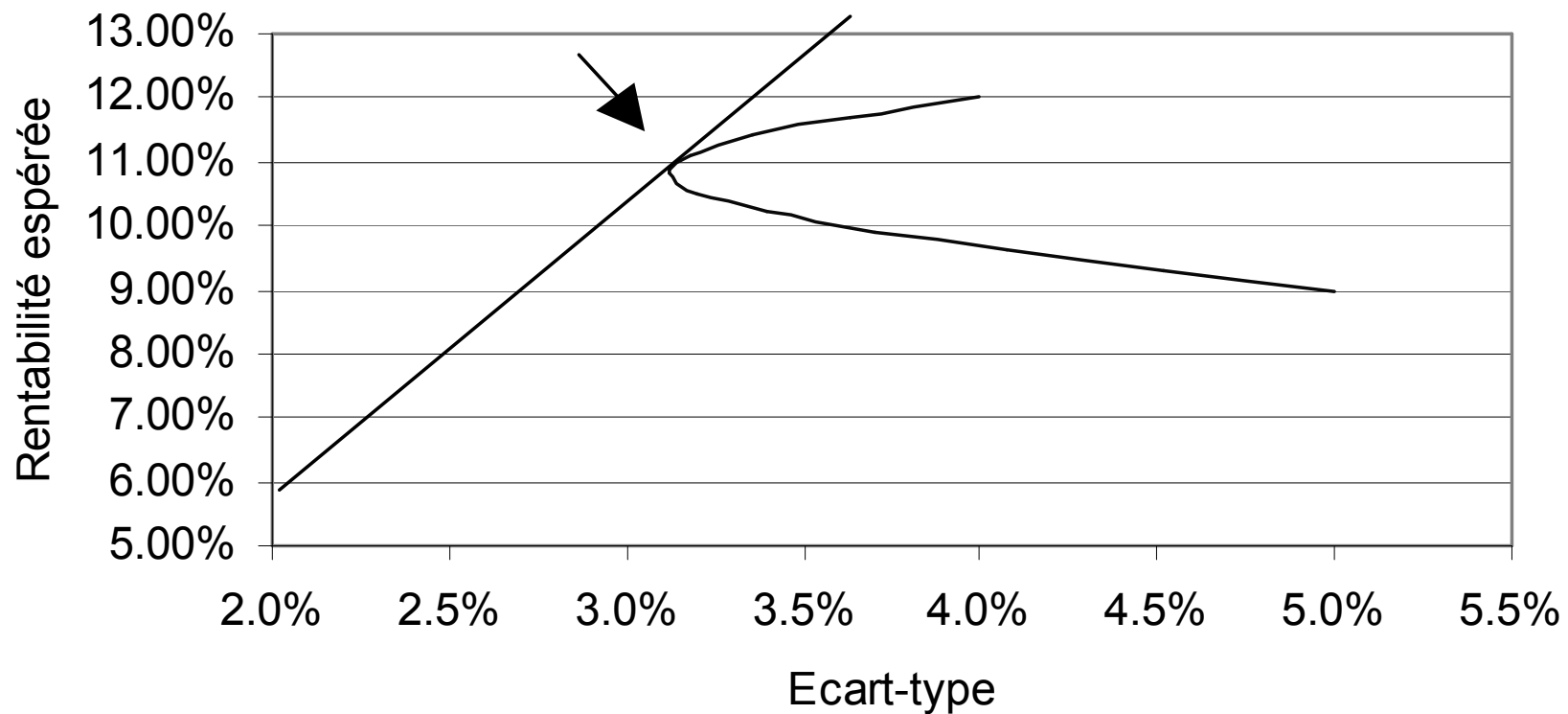
- ◆ Droite de couple risque-rentabilité : portefeuilles efficients composés d'un actif sans risque et d'un actif risqué



- ◆ Courbe du couple risque-rentabilité : portefeuilles composés de 2 actifs risqués



## Combinaison optimale d'actifs risqués



## Synthèse

### **Pour déterminer sa stratégie d 'investissement :**

- ♦ déterminer le portefeuille d 'actifs risqués, et sa courbe risque-rentabilité (identique pour tous)
- ♦ tracer la droite qui combine l 'actif sans risque et le portefeuille d 'actifs risqués. Cette droite est optimale quand elle est tangente à la courbe du portefeuille d 'actifs risqués (identique pour tous)
- ♦ déterminer les proportions préférées entre actif sans risque et portefeuille tangent (dépend des préférences de chacun)

## Stratégie de portefeuille

Tous les individus combinent le même actif sans risque, et le même portefeuille tangent, mais avec des proportions différentes

