

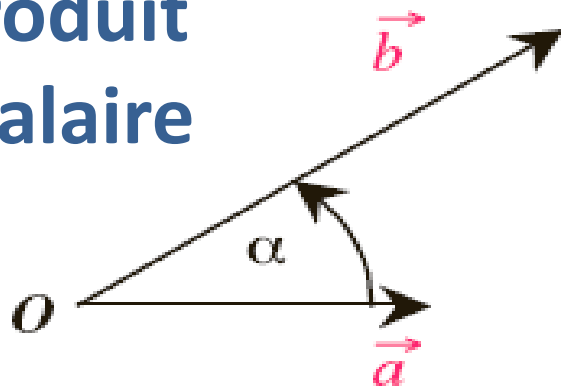
Physique 2 - Mécanique

SVT – S2 – 2019

1. Cinématique du point

Rappels mathématiques : Opérations sur les vecteurs

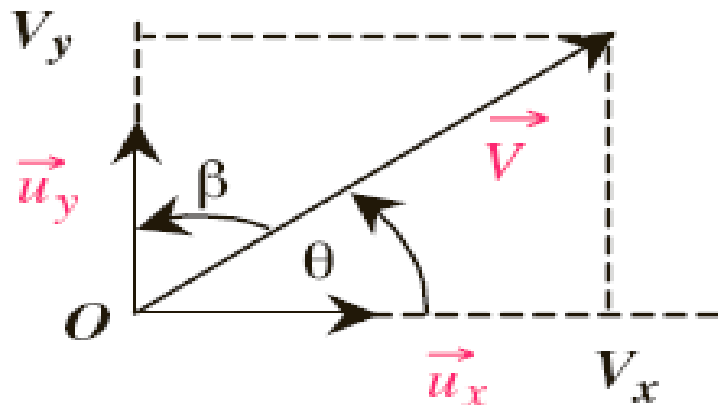
Produit scalaire



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos(\vec{a}, \vec{b}) = ab \cos \alpha$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \vec{a}^2 = \|\vec{a}\|^2 = a^2 = x_a^2 + y_a^2 + z_a^2$$



Angle entre 2 vecteurs

$$\cos \alpha = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab}$$

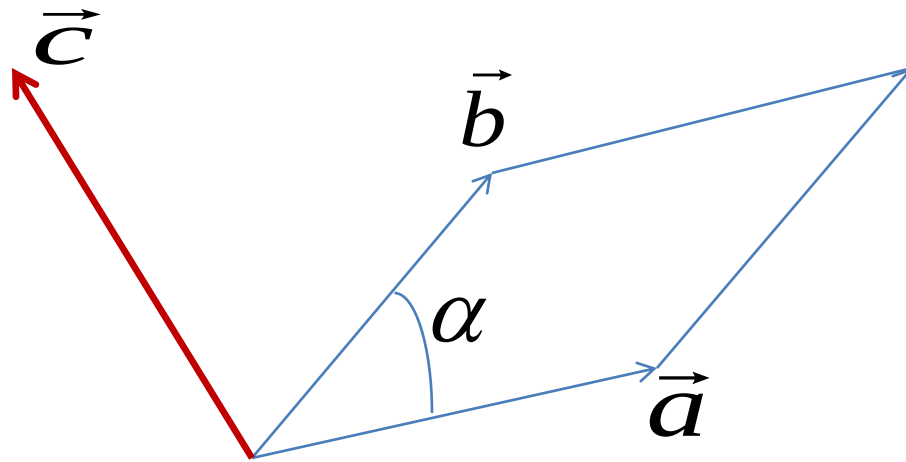
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$ si $\vec{a}$ est perpendiculaire à $\vec{b}$

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_x = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_x\| \cos \theta = V \cos \theta = V_x$$

$$\vec{V} \cdot \vec{u}_y = \|\vec{V}\| \|\vec{u}_y\| \cos \beta = V \cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = V \sin \theta = V_y$$

Produit vectoriel

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ b_x a_z - b_z a_x \\ a_x b_y - b_x a_y \end{pmatrix}$$

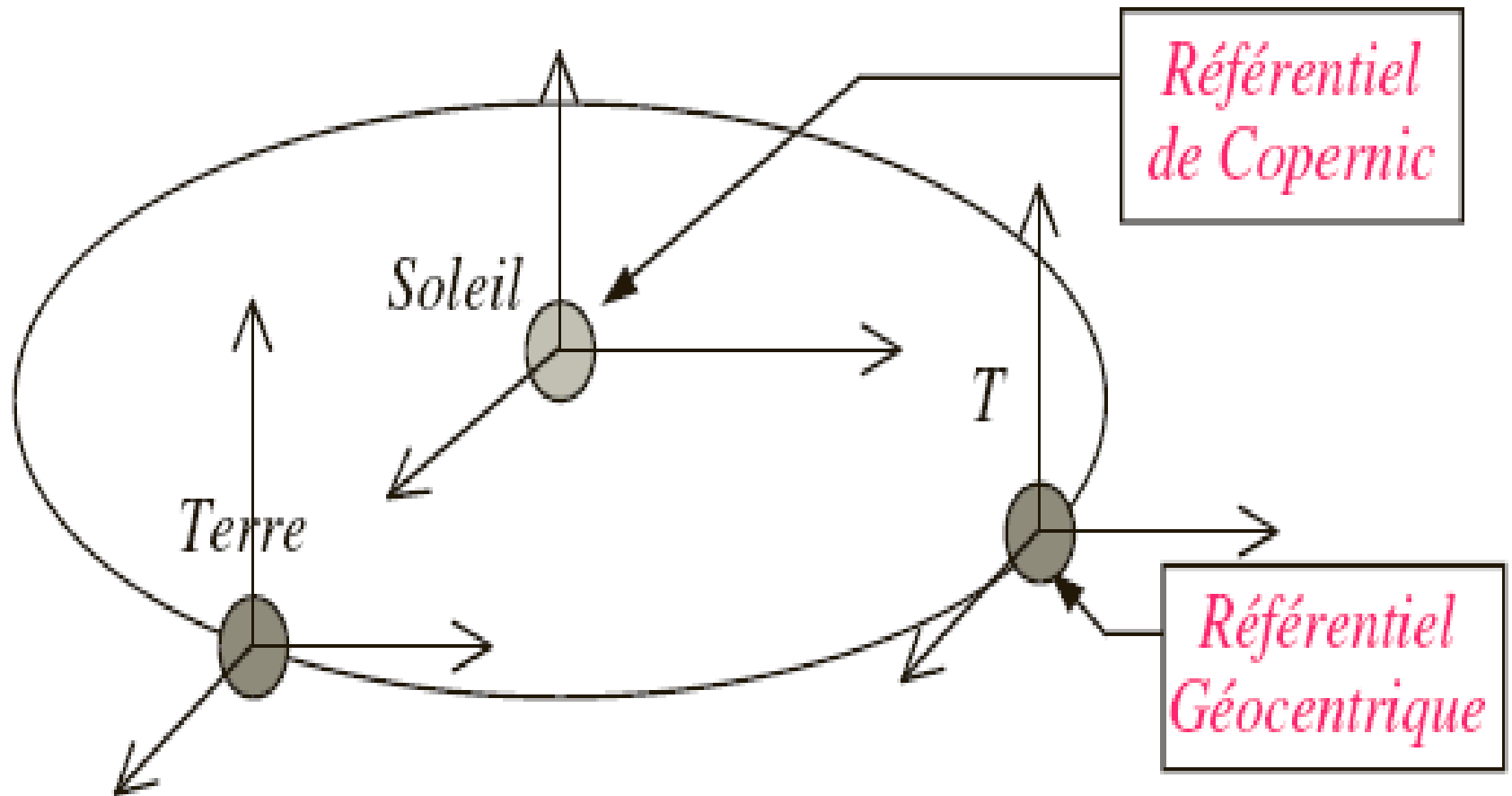


$\vec{c}$ est perpendiculaire au plan formé par les vecteurs $\vec{a}$ et $\vec{b}$

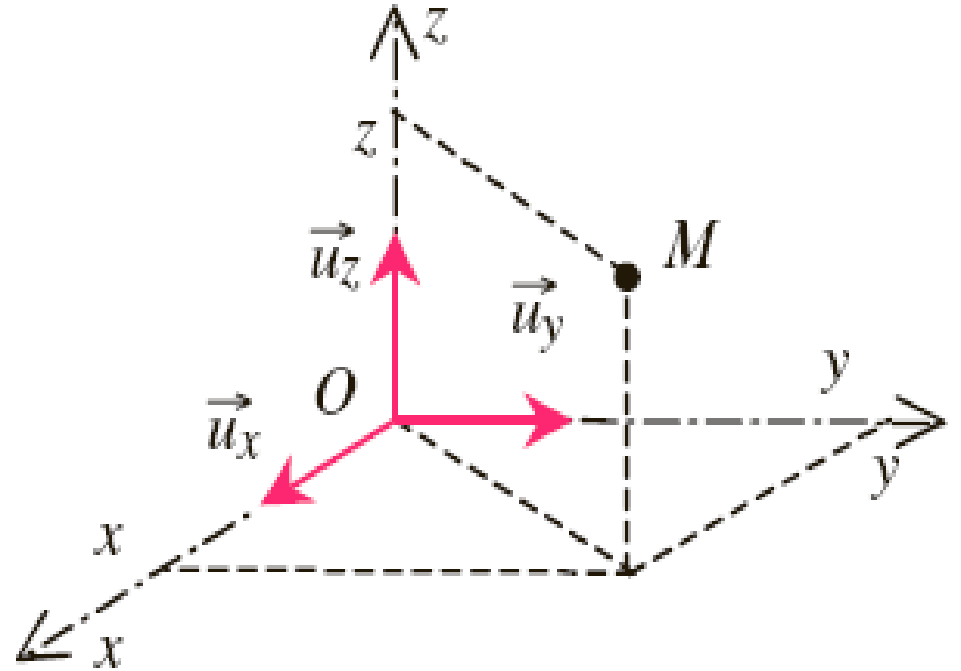
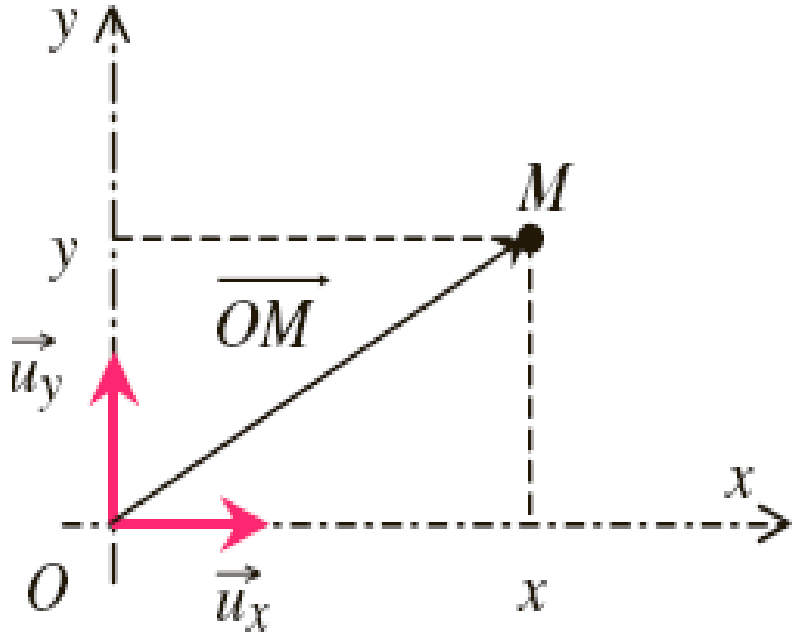
$$c = a.b.\sin \alpha$$

La valeur de c mesure la surface du parallélogramme formé par les vecteurs a et b (démonstration ?)

Tout mouvement est défini dans un Référentiel (مرجع)



Dans le *Référentiel*, on définit un *repère* : système de coordonnées



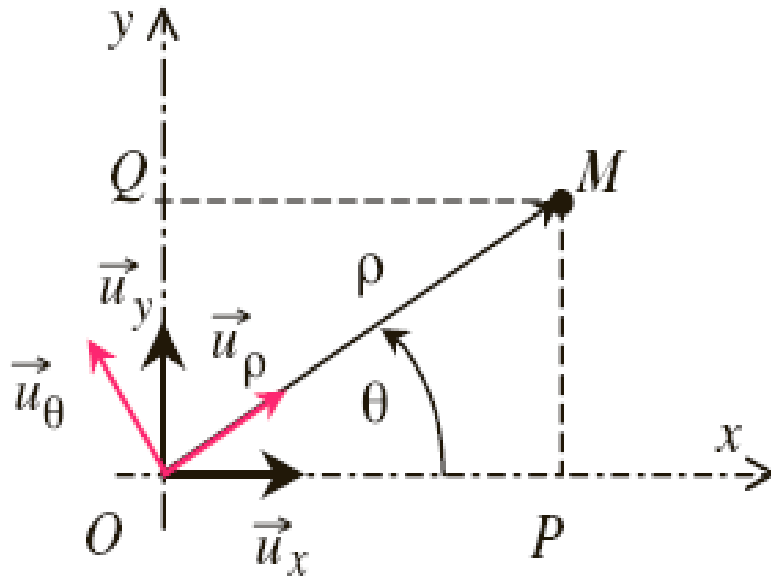
Systèmes de coordonnées cartésiennes

(Oxy) pour un mouvement plan

(Oxyz) pour un mouvement dans l'espace (3 dimensions)

Coordonnées polaires

Pour les mouvements plans autour d'un point fixe



$$\overrightarrow{OM} = \rho \vec{u}_\rho$$

$$\vec{u}_\rho = \cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y$$

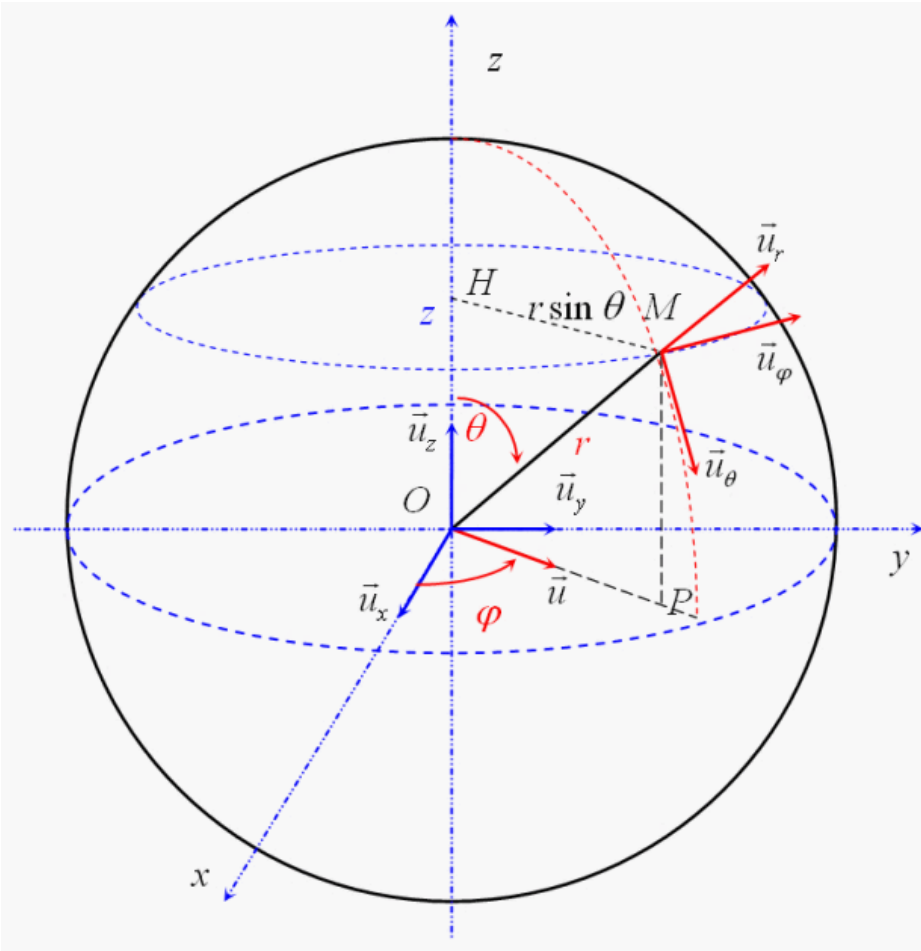
$$\vec{u}_\theta = -\sin \theta \vec{u}_x + \cos \theta \vec{u}_y$$

$$OM = \rho = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{d\theta} = \vec{u}_\theta ; \frac{d\vec{u}_\theta}{d\theta} = -\vec{u}_\rho$$

$$\frac{d\vec{u}_\rho}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\rho ; \frac{d\vec{u}_\theta}{dt} = \vec{\omega} \wedge \vec{u}_\theta ; \vec{\omega} = \omega \cdot \vec{u}_z$$

Coordonnées sphériques: pour les mouvements sur une sphère (Terre)



La position d'un point en coordonnées sphériques est définie par :

Sa distance au centre : $OM = r$

L'angle $\varphi = (\vec{u}_x, \vec{u})$

L'angle $\theta = (\vec{u}_z, \vec{u}_r)$

$$x = r \sin \theta \cos \varphi$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi$$

$$z = r \cos \theta$$

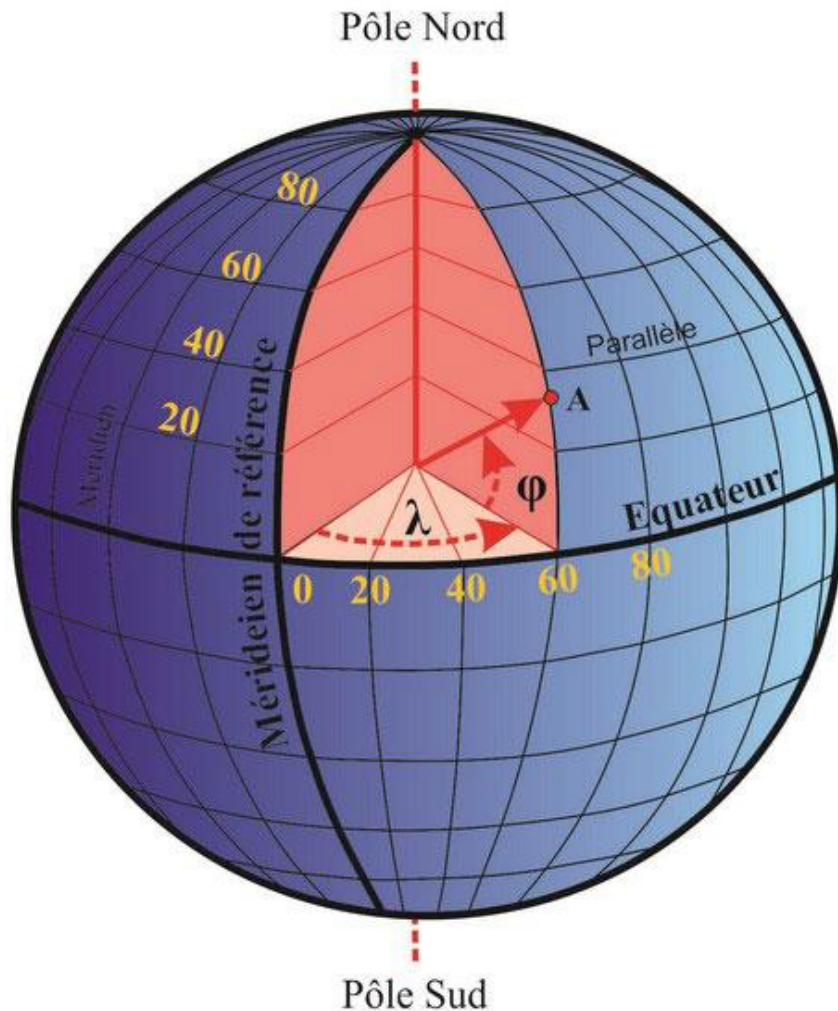
$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

$$\frac{y}{x} = \tan \varphi$$

Coordonnées géographiques

Longitude (méridien) : خط الطول

Latitude (parallèle) : خط العرض



F. Faucon Département de géographie
Université Blaise Pascal

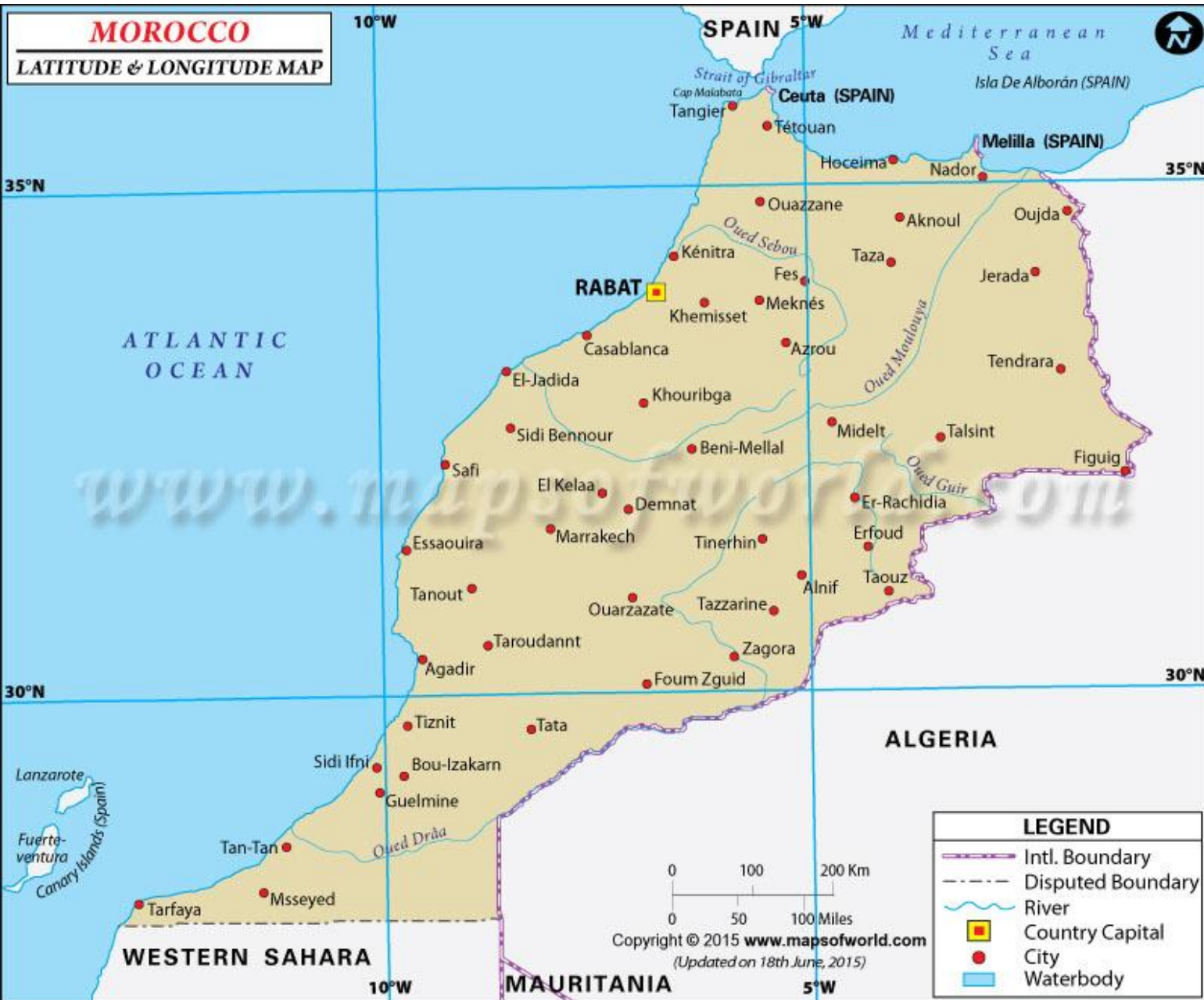
Coordonnées géographiques d'un point A à la surface de la terre :
la longitude (λ) : angle entre le méridien d'origine (Greenwich) et le méridien du point A
la latitude (φ) : angle entre l'équateur et le parallèle du point.
Rayon du parallèle

$$R_{\varphi} = R \cos \varphi ; R = 6371 \text{ km}$$

Un degré de longitude sur le parallèle correspond à la distance

$$d = \frac{2\pi}{360} R \cos \varphi$$

Notre région



Tétouan
 35° 34' 42 N
 (35,577° N)
 5° 22' 6 O
 (5,353° O)
 $1' = 1^\circ / 60 = 0.016^\circ$

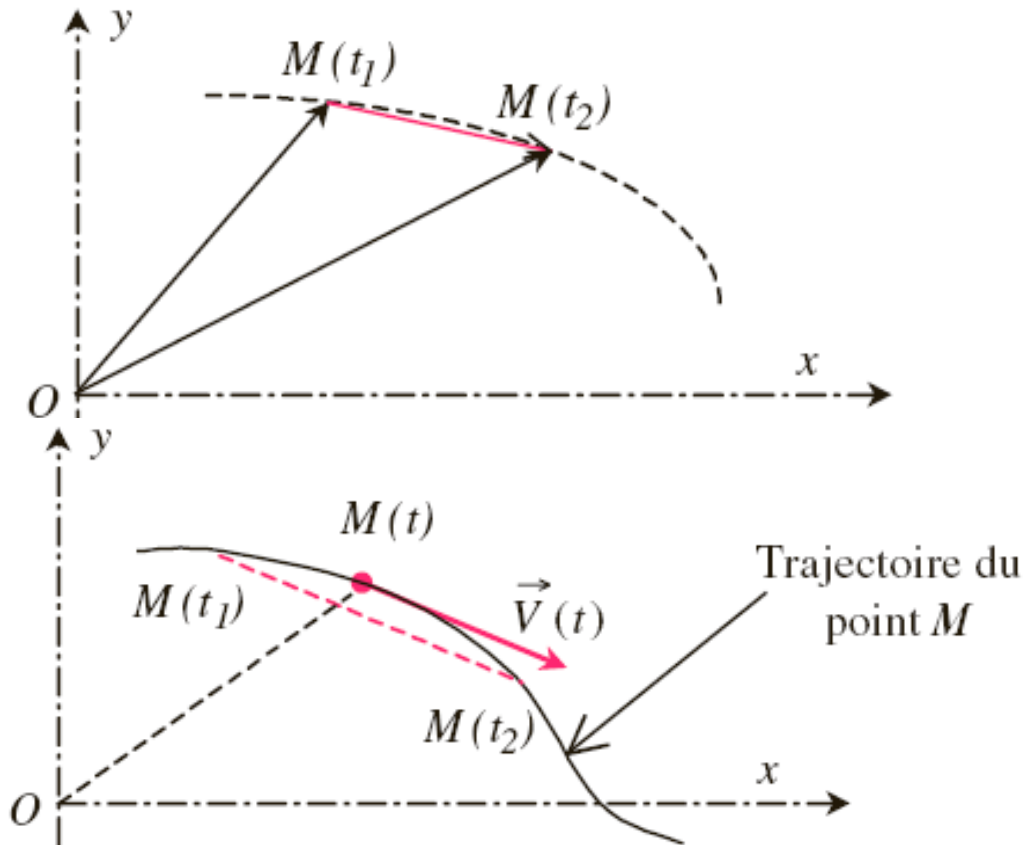
Tanger
 35° 46' 2 N
 (35,736° N)
 5° 47' 59 O
 (5,769° O)

Alhoceima
 35° 15' 05" N
 3° 56' 14" O

Chaouen
 35° 10' 17" N
 5° 16' 11" O

Vitesse et accélération

Distance parcourue = vitesse . temps



Vitesse moyenne

$$\vec{V}_M = \frac{\overrightarrow{M_1 M_2}}{t_2 - t_1} = \frac{\overrightarrow{OM_2} - \overrightarrow{OM_1}}{\Delta t}$$

Vitesse instantanée

$$V_M = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

Accélération instantanée

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt}$$

Attention : vitesse et accélération sont toujours définies par rapport à un référentiel donné.

Mouvement rectiligne

Si la trajectoire est sur une droite

$(x(t), y = 0, z = 0)$ ou $(x = 0, y(t), z = 0)$ ou $(x = 0, y = 0, z(t))$

$x = v(t - t_0) + x_0$ mouvement rectiligne uniforme (v Cste)

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0$ mouvement uniformément varié (a Cste)

$y = y_0 \sin \omega t$ mouvement sinusoïdal, oscillant, périodique (ressort)

$z = -\frac{1}{2}g(t - t_0)^2 + z_0$ chute libre d'un corps à la hauteur z_0

à partir de l'instant t_0

Vitesse et accélération en coordonnées polaires

$$\overrightarrow{OM} = \rho \cdot \vec{u}_\rho \quad ; \quad \vec{V}(t) = \frac{d}{dt}(\rho \cdot \vec{u}_\rho) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \frac{d\vec{u}_\rho}{dt}$$

$$\vec{V}(t) = \dot{\rho} \vec{u}_\rho + \rho \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$\vec{V}_n$

**Composante
radiale (normale)**

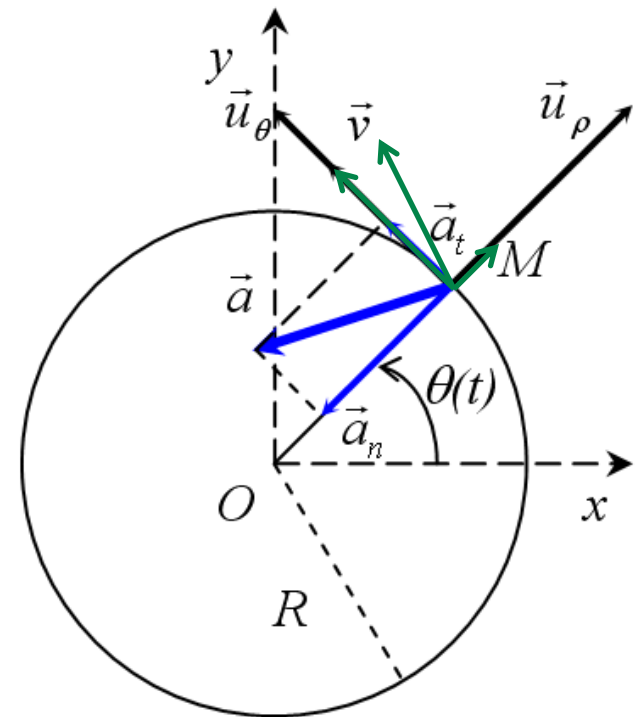
$\vec{a}_n$

$\vec{V}_t$

**Composante
tangentielle
(orthoradiale)**

$\vec{a}_t$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{V}}{dt} = (\ddot{\rho} - \rho \dot{\theta}^2) \vec{u}_\rho + (\rho \ddot{\theta} + 2\dot{\rho} \dot{\theta}) \vec{u}_\theta$$



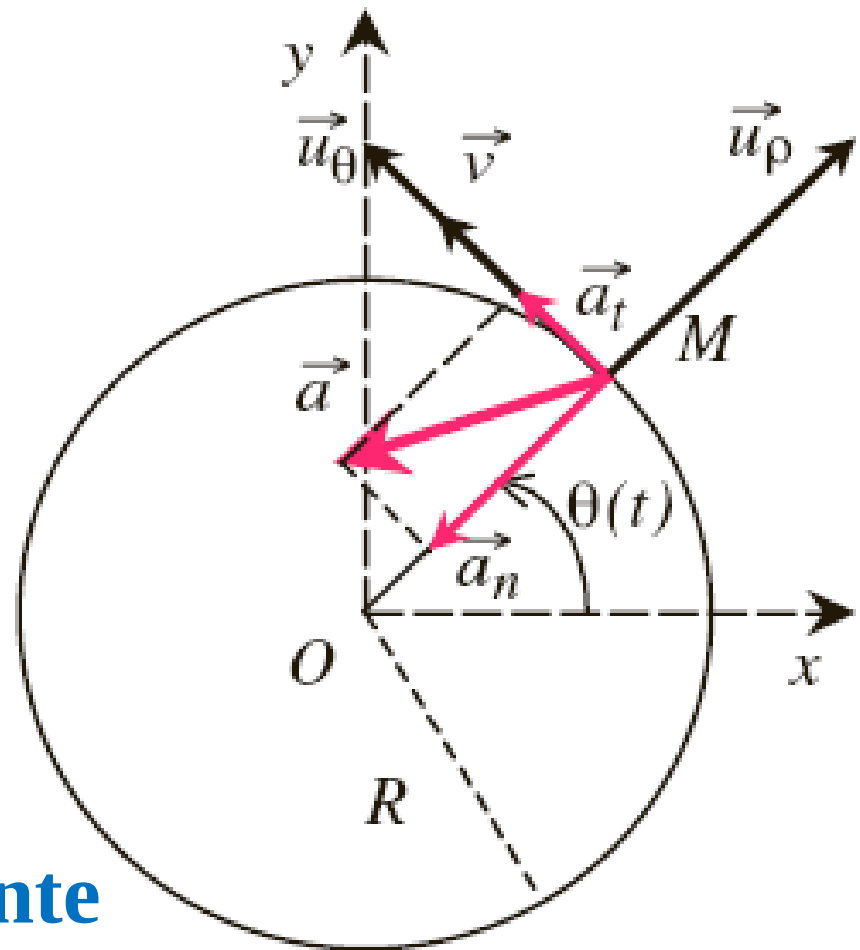
Application au Mouvement circulaire ($r=R=Cste$)

$$\overrightarrow{OM}(t) = \rho \vec{u}_\rho(t) = R \vec{u}_\rho$$

$$\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta = R \omega(t) \vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

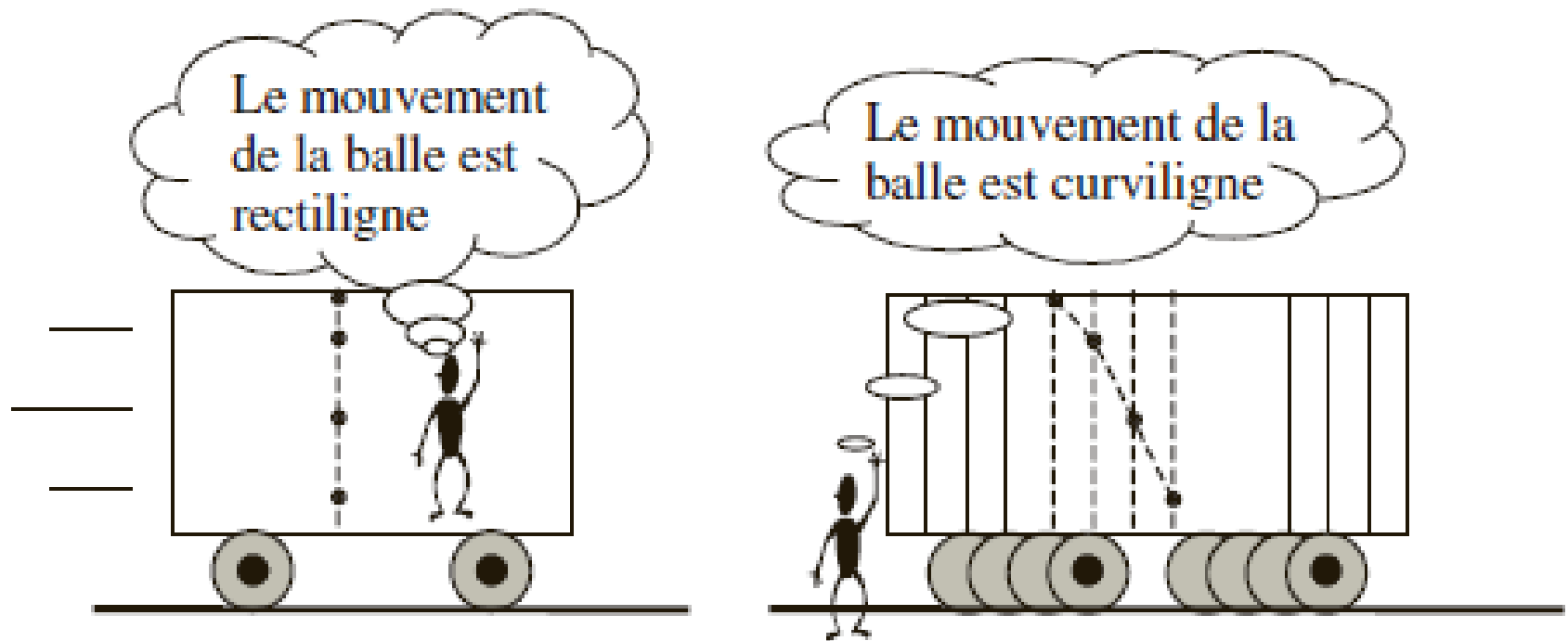
$$\vec{a} = -R\omega^2 \vec{u}_\rho + R\dot{\omega} \vec{u}_\theta$$



ω vitesse angulaire
Mouvement circulaire
uniforme si ω est constante

La vitesse est tangentielle. L'accélération a une composante tangentielle et une composante normale

Relativité du mouvement



Pour un observateur lié à la cabine : la trajectoire de la balle abandonnée d'une hauteur H est rectiligne verticale.

Pour un observateur lié au sol fixe, la trajectoire est courbe.

Il faut toujours préciser le référentiel par rapport auquel on étudie le mouvement

Equations

Supposons la balle abandonnée à la hauteur H et le train roule à la vitesse constante v . Les coordonnées de la balle vue de l'extérieur (Mouvement absolu) sont

$$x = vt \text{ (Mvt du train /sol)} \quad y = H - \frac{1}{2}gt^2 \text{ (Mvt balle ds le train)}$$

Sa vitesse absolue $\dot{x} = v$; $\dot{y} = -gt$

Equation de la trajectoire du Mvt absolu (en éliminant t)

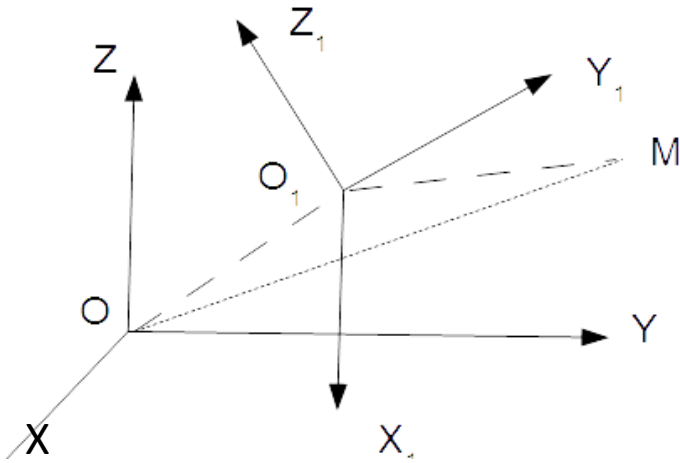
$$y = H - \frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v}\right)^2 \quad \text{qui est une parabole}$$

La balle atteint le sol ($y=0$) à l'instant t_0 lorsque la cabine a parcouru la distance x_0 donnée par

$$x_0 = \sqrt{\frac{2Hv^2}{g}} = vt_0$$

Composition des mouvements : cas général

Lorsque M se déplace dans le référentiel $\mathcal{R}_1$ lui-même en mouvement par rapport à un référentiel fixe $\mathcal{R}$



$$\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$$

$$\overrightarrow{O_1M} = x_1 \vec{u}_{x_1} + y_1 \vec{u}_{y_1} + z_1 \vec{u}_{z_1}$$

$$\vec{V}(M/\mathcal{R}) = \frac{d}{dt} \overrightarrow{OM} = \underbrace{\frac{d}{dt} \overrightarrow{OO_1} + x_1 \dot{\vec{u}}_{x_1} + y_1 \dot{\vec{u}}_{y_1} + z_1 \dot{\vec{u}}_{z_1}}_{\text{Vitesse d'entraînement de } \mathcal{R}_1 / \mathcal{R}} + \underbrace{\dot{x}_1 \vec{u}_{x_1} + \dot{y}_1 \vec{u}_{y_1} + \dot{z}_1 \vec{u}_{z_1}}_{\text{Vitesse relative de } M \text{ dans } \mathcal{R}_1}$$

Vitesse d'entraînement de $\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}$

$$x_1 \dot{\vec{u}}_{x_1} + y_1 \dot{\vec{u}}_{y_1} + z_1 \dot{\vec{u}}_{z_1} = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M}$$

ω vitesse angulaire de rotation de $\mathcal{R}_1 / \mathcal{R}$

*Vitesse relative de
M dans $\mathcal{R}_1$*

Exemples de mouvement relatif

- Lune par rapport au soleil (mouvement absolu) = Lune par rapport à la terre supposée fixe(mouvement relatif) + mouvement de la terre par rapport au soleil (mouvement d'entraînement)
- Déplacement dans un train en marche par rapport à la terre (absolu)=déplacement par rapport au train (relatif) + déplacement du train par rapport à la terre (entraînement)

Composition des accélérations

En dérivant encore une fois par rapport au temps, on trouve l'accélération absolue / $\Re$:

$$\vec{a}_a = \vec{a}_r + \vec{a}_e + \vec{a}_c$$

$$\vec{a}_r = \ddot{x}_1 \vec{u}_{x_1} + \ddot{y}_1 \vec{u}_{y_1} + \ddot{z}_1 \vec{u}_{z_1} \quad \text{Accélération relative}$$

$$\vec{a}_e = \frac{d^2}{dt^2} \overrightarrow{OO_1} + \frac{d\vec{\omega}}{dt} \wedge \overrightarrow{O_1M} + \underbrace{\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{O_1M})}_{\vec{V}_r} \quad \begin{array}{l} \text{Accélération} \\ \text{d'entraînement} \end{array}$$

$$\vec{a}_c = 2\vec{\omega} \wedge \vec{V}_r \quad \begin{array}{l} \text{Accélération complémentaire, ou de Coriolis} \\ \text{N'existe que si } \omega \text{ est non nul} \end{array}$$