initiation aux chryzodes : les nombres dans un cercle

Introduction à l'univers informatique coloré présenté par Jean-Paul Sonntag au forum du congrès,

par Pierre Duchet

NG — Les Chryzodes **42**
Création informatique de Jean-Paul Sonntag
Représentations colorées de propriétés arithmétiques très simples mettant en évidence des syzygies et des formes étonnantes.

Le cercle-horloge

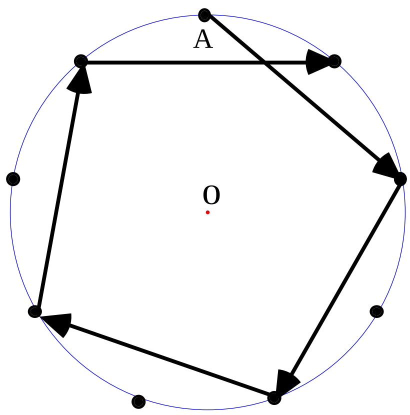
Il était une fois l'**origine** : ce sera notre *aleph* [NDLC : *a* en hébreu.], notre point *A*. C'est à l'origine que commenceront nos histoires.

Ni l'espace ni le temps dans lesquels s'inscrivent nos contes, n'auront de début ou de fin. Éternel recommencement, revenant périodiquement sur lui-même, notre espace-temps sera un disque circulaire (centré en *O* sur nos figures). Son bord sera le **cercle de base**.

Divisé de manière régulière en intervalles égaux, le cercle sera gradué. Ces points de graduation, régulièrement espacés, sont les lieux et les moments de nos histoires, les points de passage de nos personnages. Notre cercle sera ainsi horloge. Le nombre de divisions de cette horloge sera appelé le **module**.

Nos personnages, voyageurs intrépides de notre espace-temps, partiront toujours de l'origine et iront de lieu en lieu, chacun suivant une règle bien définie. Horloge oblige, le sens du temps sera le sens des aiguilles d'un montre (sens inverse du sens “trigonométrique”).

Exemple : un module 9. Le déplacement est soumis à la règle (+ 2) : à chaque étape, le personnage se déplace vers le point situé 2 intervalles plus loin.



Comme dans notre exemple, nos personnages n'utiliseront, c'est ce qui fait leur intérêt, que des opérations élémentaires : addition, multiplication, élévation à la puissance, etc … C'est de la superposition de telles histoires élémentaires que naîtra l'épopée.

Règles spatiales : les modules.

Chaque personnage agit suivant un **module**. Le module est un nombre entier m (supérieur à 1) qui indique le nombre de positions possibles sur le cercle de base. Ces positions, appelées les **sommets de base** (pour le module m), sont les m sommets du polygone régulier à m côtés, dont A est l'un des sommets et qui est inscrit dans le cercle de base.

Nous pouvons numéroter les sommets de base de proche en proche : l'origine a pour numéro 0, le sommet suivant 1, puis 2, etc …, jusqu'à m–1.

Inversement, un module m étant fixé, nous pouvons associer un sommet de base précis à chaque entier naturel N :

• à 0 nous associons l'origine A (numéro 0) ;

• à 1 nous associons le sommet de base suivant (numéro 1) ;

• à 2 , nous associons le suivant ;
et ainsi de suite … indéfiniment.

Ainsi à m–1 est associé le sommet de base qui précède A (numéro m–1), à m est associé A (numéro 0), à m+1 correspond le sommet numéro 1 et ainsi de suite : au nombre entier N est associé le sommet de base de numéro r, où r est le reste de la division de N par m.

Pour simplifier notre langage, nous parlerons du point ou de la **position** N **(modulo** m**)**, en abrégé N (mod. m) pour désigner le point de base dont le numéro est numéro r.

Règles temporelles : les clefs.

Chaque personnage possède une **clef**, qui lui indique comment se déplacer à chaque étape. Sa clef est une règle précise $\boldsymbol{R}$ qui permet de transformer un nombre entier N en un autre, noté $\boldsymbol{R}(N)$:

• à l'étape 0 le personnage est à l'origine ;

• si, à une certaine étape le personnage se trouve sur la position N (mod. m), sa position suivante sera le point $\boldsymbol{R}(N)$ (mod. m).

Chryzodes.

Le dessin obtenu en traçant la trajectoire d'un personnage s'appelle un **chryzode élémentaire**. On notera un tel chryzode sous la forme

$$((m\ ;\ R))$$

m étant le module et R la clef.

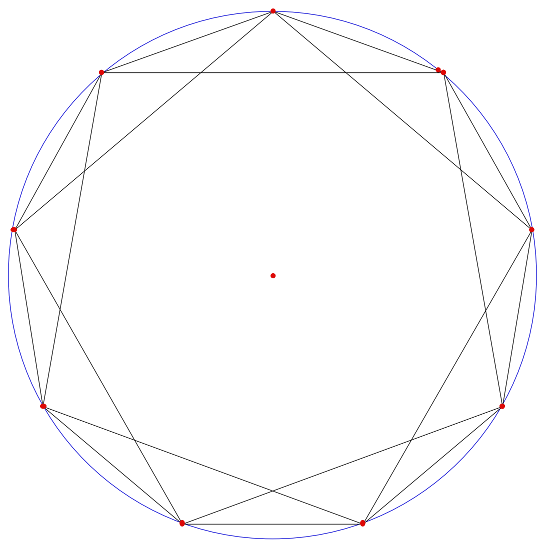
Un **chryzode** est la superposition de chryzodes élémentaires. On notera un chryzode sous la forme :

((liste des modules ; liste des règles))

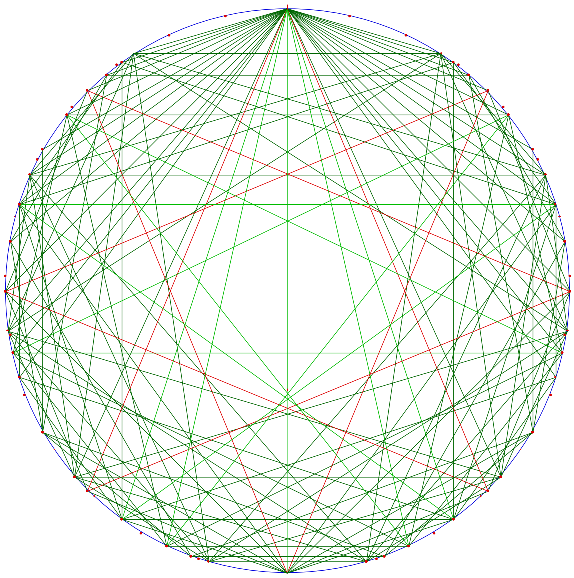
Un chryzode est ainsi l'image représentant l'histoire de plusieurs personnages.

Commençons une petite exploration : ci-dessous on a représenté le chryzode ((9,9 ; [+1], [+2])) : le module est 9 pour chacun des deux personnages et les clefs sont l'addition de 1 pour le premier personnage, l'addition de 2 pour le second :

[+1] : le nombre N est transformé en N+1
[+2] : le nombre N est transformé en N+2

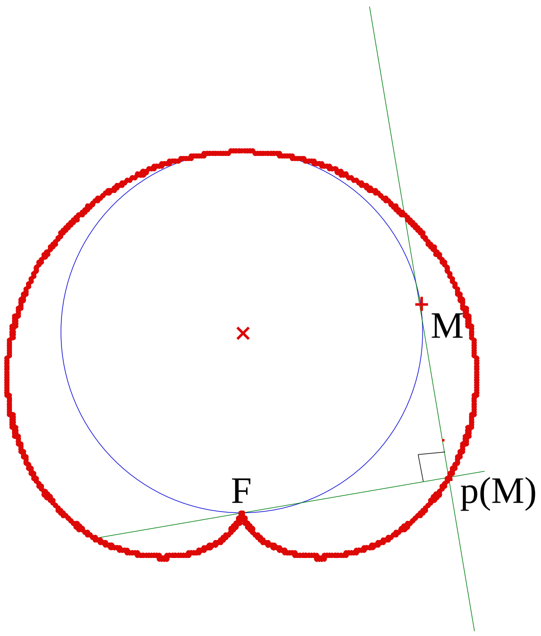


Allons plus loin, avec la même idée : en superposant les chryzodes ((k ; [+p])) pour toutes les petites valeurs de k et de p on obtient un chryzode qui fait apparaître une ligne courbe qui sous-tend de nombreuses lignes de la figure …



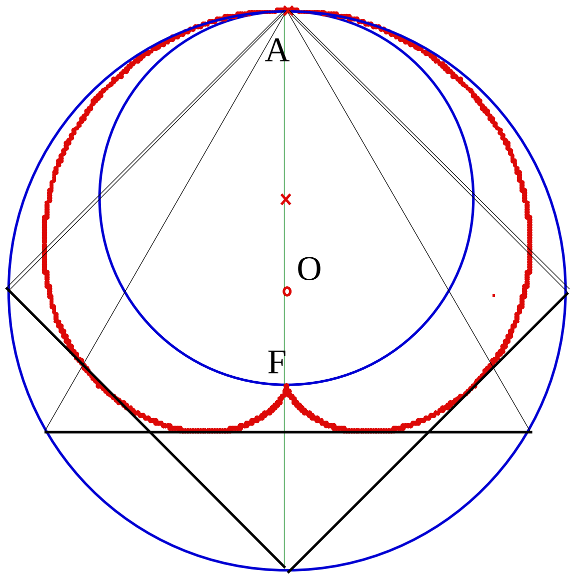
La cardioïde.

La courbe observée ressemble fort à une courbe classique appelée cardioïde (= en forme de cœur). Pour obtenir une cardioïde à partir d'un cercle on choisi un point du cercle et on le projette sur toutes les droites tangentes à ce cercle.



Sur la figure, *M* est un point variable sur le cercle, le point *F* est fixe ; *p*(*M*) désigne la projection de *F* sur la tangente au cercle au point *M*. La cardioïde est le lieu du point *p*(*M*) lorsque *M* décrit le cercle.

Reproduisons cette construction sur la figure précédente. Si *F* est placé à une hauteur d'un tiers de diamètre sur le diamètre vertical du cercle de base, la coïncidence semble parfaite : plus exactement, on s'aperçoit que tous les trajets joignants les premières aux secondes étapes semblent tangents à notre cardioïde.



Le lecteur curieux aura peut-être à cœur de prouver la justesse de la propriété de la cardioïde ainsi mise en évidence.

Les chryzodes : un monde à explorer.

La cardioïde est une des premières découvertes à laquelle peuvent conduirent l'étude systématique des chryzodes.

Jean-Paul Sonntag, inventeur des chryzodes et auteur d'un programme permettant de les visualiser sur ordinateur, varie les modules et les règles de manière à obtenir des formes, extraordinaires et merveilleuses. En colorant artistiquement les points d'intersection des trajectoires (suivant toujours des règles extrêmement simples), il obtient des images étonnantes dont le charme n'a rien à envier aux plus belles rosaces de cathédrales ou aux fractales. Le terme “Chryzode” dérive d'ailleurs du grec “chrysos” (écriture en or) et de “zooide” (cercle).

Le lecteur pourra peut-être se faire une petite idée en noir et blanc de la richesse picturale des chryzodes à partir d'une image plus dense du “chryzode de la cardioïde”

(réalisée, ainsi que les figures précédentes à l'aide de Cabri-Géomètre© II).

Références

La Brochure “Chryzodes, introduction générale” (50 F TTC) et le Programme Chryzode v.2 pour compatible PC (licence monoposte, 256 couleurs en VGA, SVGA, 1024×768 ; 16c. S3: 1280×1024. 190F TTC)

sont disponibles, ainsi que des photos couleurs (50 F les 6) aux *Editions du chryzode*, Revest les brousses, 04150 Banon ; Tél. 04 92 73 20 64.

La régularité avec laquelle sont réglés les déplacements de chaque “personnage” implique l'apparition périodique de configurations stables, semblables aux effets de résonnances qui se produisent dans les phénomènes vibratoires, en musique notamment. Il est d'ailleurs remarquable de constater que, comme en musique où les sons dont les fréquences sont en rapport simple présentent une harmonie particulière, ce sont les règles les plus simples (addition ou multiplication, élévation au carré, etc …) qui conduisent, lorsque les modules sont pris dans les multiples d'un même nombre, à des courbes claires et distinctes. Les meilleures histoires semblent bien être celles où les personnages s'entendent bien entre eux. Les chryzodes rendent compte, d'une maniére nouvelle, de propriétés connues ou inconnues des nombres entiers. Quelle ne fut pas la surprise de Jean-Paul Sonntag de voir qu'un de ses chryzodes ressemblait à s'y méprendre à une photographie obtenue par diffusion de rayons X à travers un cristal de protéine (nommée “la rubisco”, clef de voûte de la photosynthèse) récemment observé par des biologistes. Alors ? Pourra-t-on, un jour, grâce aux nombres et aux chryzodes, décrypter certains mystères de la vie ?