Opérations sur les nombres rationnels en écriture fractionnaire

A la fin du chapitre tu dois être capable de :
3 N 1: Maîtriser les règles opératoires sur les relatifs en écriture fractionnaire.
3 N 2 : Simplifier une fraction pour la rendre irréductible par différentes méthodes
(Socle 1. Calculer le PGCD de deux entiers. **Socle 2.**Simplifier une fraction donnée pour la rendre irréductible)
3 N 3 : Savoir résoudre des problèmes

Fiche erreurs sur les fractions + rappels du cours avec production d'une fiche-synthèse sur les fractions

1) Pour chacune des fractions $\frac{3}{5}, \frac{4}{7} et \frac{6}{11}$ trouve une écriture fractionnaire égale telle que:

- le dénominateur de la fraction égale à $\frac{3}{5}$ soit égal au numérateur de la fraction égale à $\frac{4}{7}$
- et que le dénominateur de la fraction égale à $\frac{4}{7}$ soit égal au numérateur de la fraction égale à $\frac{6}{11}$

solution

$\frac{3\times 24}{5\times 24} = \frac{72}{120}$ $\frac{4\times 30}{7\times 30} = \frac{120}{210}$ $\frac{6\times 35}{11\times 35} = \frac{210}{385}$

on multiplie 3 et 5 par 24 qui est un multiple de 4 et 6
on multiplie 4 et 7 par 30 qui est un multiple de 5 et 6
on multiplie 6 et 11 par 35 qui est un multiple de 7 et 5

2) voir fiche Laroche ex n°171 – 175 – 176 – 177 p 26 - 27
3) Simplifie les écritures fractionnaires suivantes:

$$E=\frac{-85}{-150}\quad F=\frac{-3\times 4\times -7}{-5\times 2\times 7}\quad G=\frac{4,5}{0,05}\quad H=-\left(\frac{-10,5}{-0,15}\right)$$

4) Compare les nombres

quelques problèmes sur les fractions ... travail en groupe sur la fiche ...

exercice 1 : Combien y a-t-il d'heures dans $\left(\frac{1}{6}+\frac{3}{8}\right)$ jours ?

exercice 2 : Simplifie $\frac{18}{24}, \frac{45}{63}, \frac{120}{150}, \frac{125}{135}, \frac{3276}{3510}$

Facile de simplifier les trois premières mais nécessité de trouver d'autres méthodes pour les deux dernières ...

1) **Maîtrisons d'abord le vocabulaire ...**

CA p 4 n° 1

Retenons

Diviseurs et multiples

Les phrases suivantes veulent dire la même chose :

« 7 est un diviseur de 91 » =

« 91 est un multiple de 7 » =

« 7 divise 91 » =

« 91 est divisible par 7 » =

Alors il existe 13 tel que $91 = 7 \times 13$

(Dans la division euclidienne de 91 par 13 ou 7, le quotient est entier et surtout le reste est nul !!!)

Pour deux entiers n et d non nuls, les phrases suivantes sont les mêmes :

« d est un diviseur de n »

« n est un multiple de d »

« d divise n »

« n est divisible par d » =

Alors il existe un nombre q tel que $n = d \times q$

- **1 est diviseur de tout entier car pour tout nombre n, $n = n \times 1$**
- **Tout nombre entier est au moins divisible par 1 et lui-même.**
- **Si un nombre entier n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même alors on l'appelle nombre premier.**

Ex : 2 n'a pas d'autres diviseurs que 1 et lui-même donc 2 est un nombre premier

Les premiers nombres premiers sont 1, 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53,57, 59, 61…

2) Recherche des diviseurs d'un nombre

a) par l'utilisation de critères de divisibilité

3 règles pour savoir	un nombre A est divisible par …	exemples
Je regarde le dernier chiffre celui des unités	**Si le chiffre des unités est :** -0, 2, 4, 6, 8 alors le nombre A est divisible par 2 --- - - 0 ou 5 alors le nombre est A divisible par 5	Ex : 71<u>2</u> - 99<u>8</u> ----------------------------------- Ex : 78<u>0</u> - 911<u>5</u>
je regarde le nombre formé par le chiffre des unités et des dizaines	**Si ce nombre de deux chiffres est :** - Multiple de 4 alors le nombre A est divisible par 4 --- -- - 00 – 25 – 50 ou 75 alors le nombre A est divisible par 25	Ex : 9<u>32</u> – 93<u>48</u> sont divisibles par 4 --------------------------------- Ex : 11<u>25</u> - 2<u>75</u>
Je fais la somme de tous les chiffres	**Si la somme de tous les chiffres est :** - Un multiple de 3 alors le nombre A est divisible par 3 --- ---- - Un multiple de 9 alors le nombre A est divisible par 9	Ex : 786 7+8+6 = 21 multiple de 3 alors 786 est divisible par 3 ---------------------------------- Ex : 567 5+6+7=18 multiple de 9 (et de 3) alors 567 est divisible par 9

<u>Retenons</u>

Divisibilité par 6: Tout nombre entier naturel divisible par 2 et par 3 est divisible par 6

Divisibilité par 7: Pour 7, la première méthode est la suivante: un nombre est divisible par 7 si et seulement si la différence entre son nombre de dizaines et le double de son chiffre des unités est divisible par 7.

Exemple : 46 123 est divisible par 7 car 4612-2x3=4606 est divisible par 7 car 460-2x6=448 est divisible par 7 car 44-2x8=28 est divisible par 7 (7x4).

Divisibilité par 8: Tout nombre entier naturel se terminant par un nombre à 3 chiffres divisible par 8, est divisible par 8.

Divisibilité par 12: Tout nombre entier naturel divisible par 3 et par 4 est divisible par 12

Divisibilité par 15: Tout nombre entier naturel divisible par 3 et par 5 est divisible par 15

CA p 4 n° 2 à 6

CA p 5 n° 7 – 8

<u>Retenons :</u>

Pour tout nombre entier a, PGCD (a, k x a) = a

Le PGCD d'un nombre et d'un de ses multiples est le nombre lui-même.

Ex : PGCD (6 ; 3) = 3 car 6 est un multiple de 3

CA p 5 n° 9 – 10 – 11 (pour le plaisir…)

Retenons
Deux nombres sont « premiers entre eux » si leur PGCD est égal à 1.
Ex : PGCD (5 ; 6) = 1 (leur seul diviseur commun est 1) donc 5 et 6 sont « premiers entre eux »

Livre p 21 n° 4 – 5 – 8
Livre p 23 n° 32

b) recherche du PGCD (a,b) par deux autres méthodes :
Algorithme 1 : **Méthode des soustractions successives :**
CA p 6 n° 1 – 2 – 3

Pour trouver le PGCD de deux nombres a et b (a>b) par la méthode des soustractions successives, on calcule (a-b) puis on recommence en remplaçant le plus grand des deux nombres par (a-b) jusqu'à l'obtention de deux nombres égaux (soustraction dont le résultat est nul)
Le PGCD de a et b est égal à ces deux derniers nombres.

Retenons :
Si d est un diviseur commun à deux entiers naturels a et b avec a>b alors d est un diviseur commun de la somme a+b et de la différence a-b.
Ex : 2 divise 4 et 6 donc 2 divise la somme 4+6 = 10 et 2 divise la différence 6 – 4 = 2.
a et b étant deux entiers naturels tels que a>b on a PGCD(a, b) = PGCD(b, a-b)

Manuel p 22 n° 23 avec le tableur Excel (voir exemple dans le manuel p 16 activité 6)

coller les 4 PGCD du n° 23 dans le cahier donc vous passez une page. Voici ce que vous devez taper sur Excel

Max des 2 nombres	Min des 2 nombres	La différence
936	624	312
Max(624,312) = 624	Min(624,312) = 312	312
Max(312,312) = 312	**Min(312,312) = 312**	0

Donc le PGCD de 936 et 624 est **312 car max = min**
La méthode s'appuie sur le fait qu'un diviseur commun à 936 et 624 est aussi un diviseur de leur différence.

Algorithme 2 : **Méthode des divisions successives = l'algorithme d'Euclide**

CA p 6 n°4
CA p 7 n° 5 – 6 (dans la 3° colonne, remplacer le mot « reste » par « quotient » et ajouter une 4° colonne avec « reste » »
CA p 7 n° 7 – 8 – 9 – 10

Pour trouver le PGCD de deux nombres a et b (a>b) par la méthode des divisions successives, on calcule le reste r de la division de a par b, puis on recommence avec les deux nombres b et r jusqu'à l'obtention de deux nombres dont l'un est multiple de l'autre (division dont le reste est nul)
Le PGCD de a et b est égal au dernier reste non nul.

Retenons : méthode des divisions (algorithme d'Euclide)

a et b étant deux entiers naturels non nuls tels que a>b, r étant le reste de la division euclidienne de a par b, on a PGCD (a, b) = PGCD (b, r)
PGCD (dividende, diviseur) = PGCD (diviseur, reste) = le dernier reste non nul

Livre p 22 n° 24 avec le tableur Excel et la méthode des divisions (4 colonnes)

Laisser une page pour coller les calculs

dividende	diviseur	quotient	reste
702	273	2	156
273	156	1	117
156	117	1	39
117	39	3	0

702 = 273 x 2 + 156

273 = 156 x 1 + 117

156 = 117 x 1 + 39

117 = 39 x 3 + 0 = 39 x 3
Le dernier reste non nul est 39, donc PGCD (702,273) = 39

La méthode s'appuie sur le fait qu'un diviseur commun à 702 et 273 est aussi un diviseur commun et au reste 156 de la division de 702 par 273.

et enfin le c) par choix des deux algorithmes

Ex p. 22 n° 26

Utilisation du PGCD de deux nombres pour simplifier une fraction :

.*CA* p 10 n° 1 – 2 - 5 – 6
CA p 12 n° 9

Retenons :
Une fraction simplifiée le plus possible est dite irréductible.
Une fraction est dite irréductible si le numérateur et le dénominateur sont premiers entre eux (PGCD(numérateur, dénominateur) = 1).
Pour simplifier une fraction de façon efficace:

- **calculer le PGCD du numérateur et du dénominateur**
- **diviser le numérateur et le dénominateur par le PGCD obtenu.**

Utilisation du PGCD de deux nombres pour résoudre des problèmes
CA p 8 n° 1 à 4
CA p 9 n° 5 et 6.
Livre p 26 n° 71
Livre p 27 n° 75