

Probabilités

28 novembre 2006

Table des matières

4.3	Uniforme intégrabilité	3
5	Espérance conditionnelle	4
5.1	Rappels et compléments sur les tribus $\sigma(X)$	4
5.2	Espérance conditionnelle. Le cas discret.	4
5.2.1		4
5.2.2		5
5.3	Définition et construction de l'espérance conditionnelle sachant une tribu d'évènements	5
5.4	Premiers exemples d'espérance conditionnelle	7
5.5	Autres propriétés de l'espérance conditionnelle	7
5.5.1	Convergence monotone	7
5.5.2	Lemme de Fatou	7
5.5.3	Convergence dominée	8
5.5.4	Inégalité de Jensen	8
5.5.5		8
5.5.6	Transitivité	8
5.5.7	Propriété fondamentale	8
5.5.8	Indépendance et espérance conditionnelle	9
5.5.9	Probabilité conditionnelle	9
5.6	Illustration et autres exemples	10
5.6.1	Notion d'indépendance conditionnelle	10
5.6.2	Exemple de calcul via des densités	10
6	Martingales	11
6.1	Définitions. Exemples. Premières propriétés.	11
6.1.1	Filtration	11
6.1.2	Définitions	11

6.1.3	Quelques propriétés élémentaires	12
6.2	Inégalités maximales de Doob	12
6.3	Deuxième inégalité de Doob. Montées. Intervalles de montées .	12
6.4	Théorème de convergence	14

4.3 Uniforme intégrabilité

Théorème et définition (famille uniformément intégrable) : Soit $M \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Sont équivalents :

1. M est bornée dans $\mathcal{L}^1$, i.e. $\sup_{X \in M} \|X\|_1 < +\infty$ et $\forall \epsilon > 0, \exists \delta > 0$ tels que $\mathbb{E}(|X| \mathbf{1}_A) \leq \epsilon$ si $\mathbb{P}(A) \leq \delta, A \in \mathcal{F}$ et $X \in M$
- 2.

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \left[\sup_{X \in M} \mathbb{E}(|X| \mathbf{1}_{\{|X| \geq \alpha\}}) \right] = 0$$

On dit alors que M est une famille uniformément intégrable.

Théorème : Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables et soit X une variable aléatoire réelle (relative à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$).

" $X \in \mathcal{L}^1$ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ " $\Leftrightarrow$ " $X_n \xrightarrow{pr} X$ et $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable"

Théorème : Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}, X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que $X_n \xrightarrow{ps} X$, alors :

" $X \in \mathcal{L}^1$ et $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}^1} X$ " $\Leftrightarrow$ " $\{X_n\}_{n \geq 1}$ est uniformément intégrable"

Illustration : Complément à la loi faible des grands nombres Soit X une variable aléatoire réelle intégrable, $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles (2 à 2) indépendantes telle que $\forall n \geq 1, \mathbb{P}_{X_n} = \mathbb{P}_X$. Alors :

$$\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \xrightarrow{pr} \mathbb{E}(X)$$

5 Espérance conditionnelle

5.1 Rappels et compléments sur les tribus $\sigma(X)$

Rappel : Si $X : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$, on note $\sigma(X)$ la plus petite sous-tribu de $\mathcal{F}$ qui rend X mesurable.

$$\sigma(X) = \{X^{-1}(B) : B \in \mathcal{E}\}$$

Théorème : Soit Y une variable aléatoire réelle (relative à $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$), alors Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe $\varphi : (E, \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{R}$ $\mathcal{E}$ -mesurable telle que $Y = \varphi(X)$.

De même si Y est une variable aléatoire positive, alors Y est $\sigma(X)$ -mesurable si et seulement si il existe $\varphi : (E, \mathcal{E}) \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_+$ $\mathcal{E}$ -mesurable telle que $Y = \varphi(X)$.

Remarque : Si $Y = \varphi(X)$ alors Y est $\sigma(X)$ -mesurable par composition.

Remarque :

1. Si Y est $\sigma(X)$ -mesurable bornée, $|Y| \leq c < +\infty$, alors $Y = \varphi(X)$ avec φ mesurable telle que $|\varphi| \leq c$
2. En pratique, si X est un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d : X = (X_1, \dots, X_d)$ et $\sigma(X) = \sigma\left(\bigcup_{j=1}^d \sigma(X_j)\right)$.
Si Y est $\sigma(X)$ -mesurable, alors il existe $\varphi : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable telle que $Y = \varphi(X_1, \dots, X_d)$
3. A propos de l'unicité pour l'égalité presque sûre, si $\varphi(X) = \phi(X)$ presque sûrement, alors $\mathbb{P}_X(\varphi \neq \phi) = 0$

5.2 Espérance conditionnelle. Le cas discret.

Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité.

5.2.1

Si $B \in \mathcal{F}$, $\mathbb{P}(B) > 0$, on définit la probabilité conditionnelle par :

$$\forall A \in \mathcal{F}, \quad \mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A|B) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

C'est une probabilité sur $\mathcal{F}$ et $\mathbb{P}_B = \frac{\mathbf{1}_B}{\mathbb{P}(B)}\mathbb{P}$.

Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors $X \in \mathcal{L}^1(\mathbb{P}_B)$ et :

$$\mathbb{E}_B(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(B)} \int_B X d\mathbb{P}$$

5.2.2

Soit $U : (\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}) \rightarrow (E, \mathcal{E})$ une variable aléatoire discrète (car E est dénombrable).

Si $A \in \sigma(U)$ alors il existe $B \in \mathcal{E}$ telle que $A = \{U \in B\} = \bigcup_{b \in B} \{U = b\}$.

Pour les $b \in E$ tels que $\mathbb{P}(U = b) > 0$, on peut définir $\mathbb{E}_{|U=b}$ et $\mathbb{P}_{|U=b}$.
Soit X une variable aléatoire réelle intégrable, on peut définir

$$Y = \mathbb{E}_{U=b}(X) = \frac{1}{\mathbb{P}(U = b)} \int_{U=b} X d\mathbb{P} \text{ si } \mathbb{P}(U = b) > 0$$

Dans le cas où $\mathbb{P}(U = b) = 0$, Y est une constante (indéterminée).

Remarque :

1. " Y est $\sigma(U)$ " car une variable aléatoire est $\sigma(U)$ -mesurable si et seulement si elle est constante sur chaque atome $\{U = b\}$.
2. $\mathbb{E}(|Y|) \leq \mathbb{E}(|X|)$
3. $\forall A \in \sigma(U), \quad \mathbb{E}(Y\mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X\mathbf{1}_A)$

Interprétation : $Y(\omega) =$ espérance de X sachant $U(\omega)$, d'où la notation (ultérieure) $Y = \mathbb{E}(X|U)$.

De même, $Y(\omega)$ est l'espérance de X lorsque, de l'issue ω , je connais toutes les informations liées à $\sigma(U)$ (c'est à dire, $\forall A \in \sigma(U)$ je sais si A est réalisée ou non lors de l'issue ω). D'où la notation $Y = \mathbb{E}(X|\sigma(U))$.

5.3 Définition et construction de l'espérance conditionnelle sachant une tribu d'évènements

Définition (espérance conditionnelle) : Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité, $\mathcal{B} \subset \mathcal{F}$ une sous-tribu d'évènements.

Soit $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on appelle (version de l') espérance conditionnelle de X sachant $\mathcal{B}$ toute variable aléatoire réelle Y sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ telle que :

1. $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Y $\mathcal{B}$ -mesurable.
2. $\forall A \in \mathcal{B}, \quad \mathbb{E}(Y \mathbf{1}_A) = \mathbb{E}(X \mathbf{1}_A)$

On note $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ presque sûrement.

Remarque : Si Y' est une autre variable aléatoire réelle $\mathcal{B}$ -mesurable telle que $Y = Y'$ presque sûrement, alors $Y' = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ presque sûrement.

Lemme (unicité et monotonie) : Si $X, X' \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, si Y et Y' sont des versions de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ et $\mathbb{E}(X'|\mathcal{B})$ (respectivement) et si $X \leq X'$ presque sûrement, alors $Y \leq Y'$ presque sûrement.

En particulier, si $X = X'$ presque sûrement, alors $Y = Y'$ presque sûrement.

Remarque : En particulier, si $X \geq 0$ presque sûrement, alors $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \geq 0$ presque sûrement.

Lemme : Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, alors $\mathbb{E}(|Y|) \leq \mathbb{E}(|X|)$

Lemme (extension des identités d'espérance conditionnelle) : Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ presque sûrement, alors pour toute variable aléatoire Z $\mathcal{B}$ -mesurable bornée

$$\mathbb{E}(ZX) = \mathbb{E}(YZ)$$

Théorème (existence) : Pour tout $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, pour toute sous-tribu $\mathcal{B}$ de $\mathcal{F}$, il existe une variable aléatoire Y telle que $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ presque sûrement.

Remarque : Si $|X| \leq c$ sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, on peut alors choisir $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ telle que $|Y| \leq c$.

Interprétation : Si $Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, par extrapolation du cas discret, on est amené à interpréter $Y(\omega)$ comme l'espérance de X lorsque l'on sait pour tout $A \in \mathcal{B}$ on sait si A est réalisé ou non lors de l'issue ω .

De même, si $Y = \mathbb{E}(X|Z)$, alors $Y(\omega)$ est l'espérance de X sachant $Z(\omega)$. Mais attention : Si $\mathbb{P}(Z = b) = 0$, l'évènement $\mathbb{E}(X|Z = b)$ n'a pas de sens.

5.4 Premiers exemples d'espérance conditionnelle

Si $\mathcal{B} = \{\emptyset, \Omega\}$ Si $X \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$$

Si $\mathcal{B} = \mathcal{F}$ Si $X \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = X$$

Si X est indépendante de $\mathcal{B}$ Si $X \in L^1$, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X)$$

Cas gaussien Soit $(X_1, \dots, X_{n+1})$ un vecteur gaussien centré, alors il existe $(\alpha_j)_{1 \leq j \leq n} \in \mathbb{R}^n$ tel que

$$\mathbb{E}(X_{n+1}|X_1, \dots, X_n) = \sum_{j=1}^n \alpha_j X_j$$

Remarque $X \mapsto Y = \mathbb{E}(X|\mathcal{B})$ est une application linéaire croissante et est une contraction (i.e. $\|Y\|_1 \leq \|X\|_1$).

5.5 Autres propriétés de l'espérance conditionnelle

Soient $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

5.5.1 Convergence monotone

Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $\forall n \geq 1, X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $X_n \leq X_{n+1}$ presque sûrement. On pose $X = \sup_{n \geq 1} X_n$.

Alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \text{ presque sûrement}$$

5.5.2 Lemme de Fatou

Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires telles que $\forall n \geq 1, X_n \in \mathcal{L}_+^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et on suppose que $\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n \in \mathcal{L}^1$. Alors :

$$\mathbb{E} \left(\liminf_{n \rightarrow +\infty} X_n \middle| \mathcal{B} \right) \leq \liminf_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \text{ presque sûrement}$$

5.5.3 Convergence dominée

Soit $\{X_n\}_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires et $Z \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, telles que $\forall n \geq 1, X_n \in \mathcal{L}_+^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), |X_n| \leq Z$ et $X_n \xrightarrow{ps} X$. Alors $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbb{E}(X_n|\mathcal{B}) \text{ presque sûrement}$$

5.5.4 Inégalité de Jensen

Soit $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\varphi : I \rightarrow \mathbb{R}$ convexe, avec I intervalle de $\mathbb{R}$ tel que $\mathbb{P}(X \in I) = 1$. Si $\varphi(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors

$$\varphi(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) \leq \mathbb{E}(\varphi(X)|\mathcal{B})$$

Application Si $X \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P}), 1 \leq p \leq +\infty$, alors $\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) \in \mathcal{L}^p$ et

$$\|\mathbb{E}(X|\mathcal{B})\|_p \leq \|X\|_p$$

5.5.5

Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B})) = \mathbb{E}(X)$$

5.5.6 Transitivité

Soient $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$ telles que $\mathcal{B}_1 \subset \mathcal{B}_2$, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_2)|\mathcal{B}_1) \text{ presque sûrement}$$

Remarque

1. Cette propriété est liée au théorème des trois perpendiculaires pour les espaces de Hilbert :

Si E est un espace de Hilbert et V_1, V_2 deux sous-espaces vectoriels fermés de H tel que $V_1 \subset V_2$, alors $\pi_{V_1} = \pi_{V_1} \circ \pi_{V_2}$.

- 2.

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(X|\mathcal{B}_1)|\mathcal{B}_2) \text{ presque sûrement}$$

5.5.7 Propriété fondamentale

Si $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et Z est $\mathcal{B}$ -mesurable telle que $ZX \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, alors

$$Z\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(ZX|\mathcal{B}) \text{ presque sûrement}$$

5.5.8 Indépendance et espérance conditionnelle

Soient $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, et $\mathcal{B}, \mathcal{B}'$ deux sous-tribus de $\mathcal{F}$.
Si $\mathcal{B}'$ et $\sigma(\sigma(X) \cup \mathcal{B})$ sont indépendantes, alors

$$\mathbb{E}(X|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(X|\sigma(\mathcal{B} \cup \mathcal{B}')) \text{ presque sûrement}$$

Lemme Soit $\mathcal{S} \subset \mathcal{B}$ un π -système tel que $\Omega \in \mathcal{S}$ et $\sigma(\mathcal{S}) = \mathcal{B}$ et $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

Alors pour que $Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, $\mathcal{B}$ -mesurable, soit une version de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$, il suffit que

$$\forall A \in \mathcal{S}, \quad \mathbb{E}(\mathbf{1}_A Y) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A X)$$

Remarque : $\mathcal{B}'$ et X indépendant ne suffit pas.

5.5.9 Probabilité conditionnelle

Définition (probabilité conditionnelle) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$.

Soit $A \in \mathcal{F}$. On appelle version de la probabilité conditionnelle de A sachant $\mathcal{B}$ toute version de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{B})$:

$$\mathbb{P}(A|\mathcal{B}) = \mathbb{E}(\mathbf{1}_A|\mathcal{B})$$

$\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ est donc une variable aléatoire telle que :

1. $0 \leq \mathbb{P}(A|\mathcal{B}) \leq 1$ presque sûrement
2. Pour toute suite $(A_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ d'éléments de $\mathcal{F}$ deux à deux disjoints :

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{+\infty} A_n \middle| \mathcal{B}\right) = \sum_{n=1}^{+\infty} \mathbb{P}(A_n|\mathcal{B})$$

Remarque Si C est un atome de $\mathcal{B}$ tel que $\mathbb{P}(C) > 0$, alors $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})$ est constante sur C .

En général, on peut interpréter $\mathbb{P}(A|\mathcal{B})(\omega)$ comme la probabilité de A sachant de ω toutes les informations liées à $\mathcal{B}$.

5.6 Illustration et autres exemples

5.6.1 Notion d'indépendance conditionnelle

Théorème soient $\mathcal{B}_1$, $\mathcal{B}_2$ et $\mathcal{B}_3$ trois sous-tribus de $\mathcal{F}$. On a équivalence entre :

1. $\forall X_1 \in b\mathcal{B}_1$ et $\forall X_3 \in b\mathcal{B}_3$, on a :

$$\mathbb{E}(X_1 X_3 | \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X_1 | \mathcal{B}_2) \mathbb{E}(X_3 | \mathcal{B}_2)$$

2. $\forall X_1 \in b\mathcal{B}_1$, $\mathbb{E}(X_1 | \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X_1 | \sigma(\mathcal{B}_2 \cup \mathcal{B}_3))$
3. $\forall X_3 \in b\mathcal{B}_3$, $\mathbb{E}(X_3 | \mathcal{B}_2) = \mathbb{E}(X_3 | \sigma(\mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2))$

Définition (indépendance conditionnelle) On dit que $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_3$ sont indépendantes sachant $\mathcal{B}_2$ si l'une des propriétés du théorème est vérifiée.

5.6.2 Exemple de calcul via des densités

Théorème : Soient U et V des vecteurs aléatoires dans $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$ tels que $\mathbb{P}_{(U,V)} = f\mu_1 \otimes \mu_2$, où μ_1 et μ_2 sont des mesures sur $\mathbb{R}^{d_1}$ et $\mathbb{R}^{d_2}$. Soit $Z = h(U, V)$ intégrable, alors on a :

$$\mathbb{E}(Z|U) = \varphi(U) \text{ presque sûrement}$$

avec

$$\varphi(u) = \frac{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} h(u, v) f(u, v) d\mu_2(v)}{\int_{\mathbb{R}^{d_2}} f(u, v) d\mu_2(v)} \quad \mathbb{P}_U\text{-presque partout}$$

Lemme Soit μ une mesure σ -finie sur $\mathbb{R}^{d_1}$ et Y_1, Y_2 mesurables positifs sur $\mathbb{R}^{d_1}$ tels que :

$$\forall \theta \in b\mathcal{B}_{\mathbb{R}^{d_1}}^+, \quad \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \theta(u) Y_1(u) d\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^{d_1}} \theta(u) Y_2(u) d\mu(u)$$

Alors $Y_1 = Y_2$ μ -presque partout.

6 Martingales

6.1 Définitions. Exemples. Premières propriétés.

6.1.1 Filtration

Définition (filtration) Soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$. Une filtration d'ensemble de temps $\mathbb{T}$ est une famille $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ de sous-tribus de $\mathcal{F}$ telle que $\forall t, s \in \mathbb{T}, t \leq s \Rightarrow \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F}_s$.

Définition (événement antérieur) On dit que $A \in \mathcal{F}_t$ est un événement antérieur à t .

Définition (processus adapté) Soit $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$ et $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ une filtration. Un processus (réel) adapté à $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ est une famille $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ de variables aléatoires réelles telles que $\forall t \in \mathbb{T}$, X_t est $\mathcal{F}_t$ -mesurable.

Définition (filtration propre) Soit $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ un processus. Posons

$$\mathcal{F}_t^\circ = \sigma(X_s, s \in \mathbb{T}, s \leq t) \subset \mathcal{F}$$

Alors $\{\mathcal{F}_t^\circ\}_{t \in \mathbb{T}}$ est une filtration appelée filtration propre de $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$.

6.1.2 Définitions

Définition (martingale) Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de variables aléatoires réelles (sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). On dit que $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une martingale si :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$
2. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n^\circ)$ presque sûrement.

Remarque : On a alors $\forall m \geq n, \mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n^\circ) = X_n$ presque sûrement.

Par extension, si $\mathbb{T} \subset \overline{\mathbb{R}_+}$, $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ une filtration. On appelle $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ martingale, tout processus $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ tel que :

1. $\{X_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ est $\{\mathcal{F}_t\}_{t \in \mathbb{T}}$ -adapté
2. $\forall t \in \mathbb{T}, X_t \in \mathcal{L}^1$
3. $\forall s, t \in \mathbb{T}, s \geq t \Rightarrow X_t = \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_t)$ presque sûrement

Définition (sur-martingale) Soit $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une filtration (sur $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$). Une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sur-martingale est un processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que :

1. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n$ est $\mathcal{F}_n$ -mesurable
2. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \in \mathcal{L}^1$
3. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n \geq \mathbb{E}(X_{n+1} | \mathcal{F}_n)$ presque sûrement

De plus, $\forall m, n \in \mathbb{N}, m \geq n \Rightarrow X_n \geq \mathbb{E}(X_m | \mathcal{F}_n)$ presque sûrement.
En particulier $\mathbb{E}(X_n) \geq \mathbb{E}(X_m)$.

Définition (sous-martingale) Une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingale est un processus $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tel que $\{-X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sur-martingale.

6.1.3 Quelques propriétés élémentaires

Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sont des $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingales, alors $\{X_n \vee Y_n\}_{n \in \mathbb{N}}$, $\{X_n^+\}_{n \in \mathbb{N}}$ et $\{X_n \vee \alpha\}_{n \in \mathbb{N}}$ aussi.

Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale, alors $\{|X_n|\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingale.

Si $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingale et φ une application convexe et croissante telle que $\varphi(X_n)$ est intégrable, alors $\{\varphi(X_n)\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sous-martingale.

6.2 Inégalités maximales de Doob

Théorème Soit $\{X_n\}_{0 \leq n \leq N}$ une sous-martingale et $\alpha > 0$. Alors

$$\mathbb{P} \left(\left[\sup_{0 \leq n \leq N} X_n \right] \geq \alpha \right) = \frac{1}{\alpha} \mathbb{E}(X_N^+)$$

6.3 Deuxième inégalité de Doob. Montées. Intervalles de montées

Soit $\alpha < \beta \in \mathbb{R}$.

On définit les temps $t_j(\omega)$, $j \geq 1$ en posant :

$$\begin{aligned} t_1(\omega) &= \inf \{j \in \mathbb{N} \mid X_j(\omega) \leq \alpha\} \\ t_2(\omega) &= \inf \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq t_1(\omega), X_j(\omega) \geq \beta\} \\ t_{2k+1}(\omega) &= \inf \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq t_{2k}(\omega), X_j(\omega) \leq \alpha\} \\ t_{2k+2}(\omega) &= \inf \{j \in \mathbb{N} \mid j \geq t_{2k+1}(\omega), X_j(\omega) \geq \beta\} \end{aligned}$$

Avec la convention : $\inf \emptyset = +\infty$ Il est clair que $\{t_j(\omega)\}_{j \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante dans $\overline{\mathbb{N}}$ et que :

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} X_{t_{2p+1}(\omega)}(\omega) \leq \alpha & \text{si } t_{2p+1}(\omega) < +\infty \\ X_{t_{2p+2}(\omega)}(\omega) \geq \beta & \text{si } t_{2p+2}(\omega) < +\infty \end{cases}$$

et si $t_j(\omega) < +\infty$, alors $t_j(\omega) < t_{j+1}(\omega)!$;

Définition (intervalle de montée) Les intervalles de montées de $\{X_j(\omega)\}_{j \in \mathbb{N}}$ sur $[\alpha; \beta]$ sont les intervalles de la forme :

$$[t_{2j-1}(\omega); t_{2j}(\omega)] \cap \mathbb{N}, \text{ si } t_{2j}(\omega) < +\infty$$

Définition (intervalle de montée incomplète) Si $t_{2j-1}(\omega) < +\infty$ et $t_{2j}(\omega) = +\infty$, on dit que $t_{2j-1}(\omega); t_{2j}(\omega)] \cap \mathbb{N}$ est un intervalle de montée incomplète sur $[\alpha; \beta]$.

Définition (nombre d'intervalle de montée) On appelle $M_{[\alpha; \beta]}$ le nombre d'intervalles de montées de $\{X_j(\omega)\}$ sur $[\alpha; \beta]$.

Lemme Notons $\forall k \in \mathbb{N}$, $A_k = \{\omega \in \Omega \mid \exists j \geq 1, t_{2j-1}(\omega) \leq k < t_{2j}(\omega)\}$ (= "on est en cours de montée, éventuellement incomplète, à l'instant k "). Alors :

$$A_k \in \sigma(X_1, \dots, X_k)$$

Remarque : On ne peut pas espérer que $A'_k = \{\omega \in \Omega \mid \exists j \geq 1, t_{2j-1}(\omega) \leq k < t_{2j}(\omega) < +\infty\}$ appartienne à $\sigma(X_1, \dots, X_k)$.

Lemme : Pour chaque $j \in \mathbb{N}^*$, t_j est une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$.

Conséquence $M_{[\alpha; \beta]}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\overline{\mathbb{N}}$.

Définition (nombre de montées antérieures) Pour chaque $N \in \mathbb{N}^*$, on note $M_{[\alpha; \beta]}^N$ le nombre de montées antérieures à N .

Théorème de Doob : Si $\{X_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est une sur-martingale, alors pour tout $N \in \mathbb{N}^*$:

$$\mathbb{E} [M_{[\alpha; \beta]}^N] \leq \frac{1}{\beta - \alpha} \mathbb{E} [(X_N - \alpha)_-] \leq \frac{\mathbb{E} [|X_N|] + |\alpha|}{\beta - \alpha}$$

6.4 Théorème de convergence

Lemme Soit $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ est une suite réelle telle que $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha < \beta$, le nombre de montées de $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ sur $[\alpha; \beta]$ est finie, alors $\{x_j\}_{j \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$.

Remarque : La réciproque est aussi vraie.

Théorème de convergence : Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une sur martingale bornée dans L^1 (i.e. $\sup_{n \in \mathbb{N}} \|X_n\|_1 < +\infty$). Alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers une variable aléatoire réelle intégrable.

Remarque : Si $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est une filtration telle que $\{X_n\}$ est une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -sur-martingale bornée dans L^1 et si $\mathcal{F}_\infty = \sigma \left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} \mathcal{F}_n \right)$, on peut choisir X_∞ $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable telle que, si on note $A = \{-\infty < \underline{\lim} X_n = \underline{\lim} X_n < +\infty\}$, $\forall \omega \in \Omega, X_\infty(\omega) = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n(\omega) \mathbf{1}_A$.

Remarque : En général, $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ne converge pas dans L^1 vers X_∞ .

Corollaire : Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une sur-martingale positive. Alors $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge presque sûrement vers $X_\infty \in L^1$.

Corollaire : Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une $\{F_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale uniformément bornée. Alors X_n converge presque sûrement vers X_∞ bornée et $\mathbb{E}[|X_n - X_\infty|] \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$.

De plus, $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$.

Théorème de clôture des martingales : Soit $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ une $\{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ -martingale bornée dans L^1 et $X_\infty = \lim_{n \rightarrow +\infty} X_n$ presque sûrement, X_∞ $\mathcal{F}_\infty$ -mesurable et intégrable. On a alors équivalence entre :

1. $X_n \xrightarrow{L^1} X_\infty$
2. $\{X_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ est uniformément intégrable
3. $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(X_\infty | \mathcal{F}_n)$ presque sûrement.
4. $\exists Y \in \mathcal{L}^1$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}, X_n = \mathbb{E}(Y | \mathcal{F}_n)$ presque sûrement.

Lemme Soit $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et $\mathcal{B}$ une sous-tribu de $\mathcal{F}$. On note $X_{\mathcal{B}}$ une version de $\mathbb{E}(X|\mathcal{B})$.

Alors $\{X_{\mathcal{B}}\}_{\substack{\mathcal{B} \subset \mathcal{F} \\ \text{sous-tribu}}}$ est uniformément intégrable.

Index

espérance conditionnelle, 5
évènement antérieur, 11

famille uniformément intégrable, 3
filtration, 11
filtration propre, 11

indépendance conditionnelle, 10
intervalle de montée, 13
intervalle de montée incomplète, 13

martingale, 11

nombre d'intervalle de montée, 13
nombre de montées antérieures, 13

probabilité conditionnelle, 9
processus adapté, 11

sous-martingale, 12
sur-martingale, 12

théorème de clôture des martingales,
14
théorème de convergence, 14
théorème de Doob, 13

version de l'espérance conditionnelle,
5
version de la probabilité conditionnelle,
9