Probabilités - Exercices

▷ **Exercice 1.** Un jeu de 32 cartes à jouer est constitué de quatre « familles » : trèfle et pique de couleur noire; carreau et cœur de couleur rouge. Dans chaque famille, on trouve trois « figures » : valet, dame et roi. On tire une carte au hasard dans ce jeu.

Quelle est la probabilité des événements suivants?

1. A : « la carte tirée est une dame »

Il y a 4 dames dans un jeu de 32 cartes donc

$P(A) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

2. B : « la carte tirée est une figure rouge »

Il y a 3 figures rouges donc

$P(B) = \frac{3}{32}$

3. C : « la carte tirée n'est pas une figure rouge »

C est l'événement contraire de B donc

$P(C) = P\left(\overline{B}\right) = 1 - P(B) = 1 - \frac{3}{32} = \frac{29}{32}$

▷ **Exercice 2.** On tire au hasard une carte d'un jeu de 32 cartes et on la remet dans le jeu avant d'effectuer d'autres tirages.

1. Quelle est la probabilité de tirer un cœur?

Notons C l'événement « la carte tirée est un cœur ». On a $P(C) = \frac{8}{32} = \frac{1}{4}$

2. Quelle est la probabilité de tirer un neuf?. On a $P(\{9\}) = \frac{4}{32} = \frac{1}{8}$

3. Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ou un pique?

On considère les événements T : « la carte tirée est un trèfle » et Pi :« la carte tirée est un pique ».

$P(T \cup Pi) = P(T) + P(Pi) - P(T \cap Pi)$ mais T et Pi sont incompatibles (la carte tirée ne peut pas être à la fois trèfle et pique) donc $P(T \cap Pi) = 0$ d'où $P(T \cup P) = P(T) + P(Pi) = \frac{8}{32} + \frac{8}{32} = \frac{1}{2}$

4. Quelle est la probabilité de tirer une figure?

Notons F l'événement « la carte tirée est une figure ». Il y a $4 \times 3 = 12$ figures dans le jeu donc $P(F) = \frac{12}{32} = \frac{3}{8}$

5. Quelle est la probabilité de tirer un pique ou un roi?

Notons R l'événement « la carte tirée est un roi ».

$P(Pi \cup R) = P(Pi) + P(R) - P(Pi \cap R)$ or une seule carte est à la fois pique et roi (le roi de pique) donc $P(Pi \cap R) = \frac{1}{32}$

d'où $P(Pi \cup R) = \frac{8}{32} + \frac{4}{32} - \frac{1}{32} = \frac{11}{32}$.

6. Quelle est la probabilité de tirer l'as de carreau? Il y a un seul as de carreau donc la probabilité de le choisir est $\frac{1}{32}$.

▷ **Exercice 3.** On choisit au hasard une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il d'issues possibles? Il y a 52 cartes donc 52 issues possibles.

2. On considère les évènements :

- A : « obtenir un as »;
- P : « obtenir un pique ».

a) Combien y a-t-il d'éventualités dans A?
4 as dans le jeu donc 4 éventualités dans A.

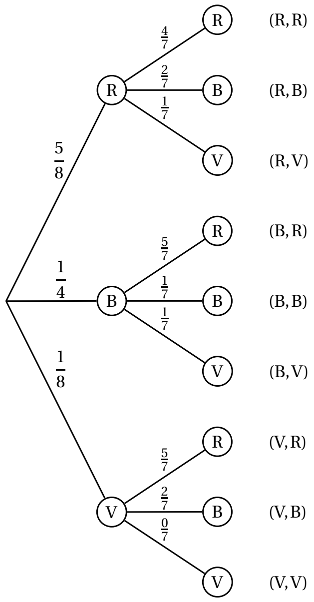
b) Combien y a-t-il d'éventualités dans P?
13 piques dans le jeu donc 13 éventualités dans P.

c) Traduire par une phrase les évènements $A \cap P$ et $A \cup P$.
$A \cap B$: « la carte choisie est l'as de pique » et $A \cup P$: « la carte choisie est un As ou un pique »

d) Calculer $P(A \cap P)$ et $P(A \cup P)$.
$P(A \cap P) = \frac{1}{32}$ et $P(A \cup P) = P(A) + P(P) - P(A \cap P) = \frac{4}{52} + \frac{13}{52} - \frac{1}{52} = \frac{4}{13}$

▷ **Exercice 4.** Dans une urne, il y a cinq boules rouges (R), deux boules bleues (B) et une boule verte (V), indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise deux boules. On veut déterminer la probabilité de tirer deux boules de la même couleur.

1. Représente sur un arbre toutes les issues en indiquant les probabilités sur les branches.



2. En déduire la probabilité d'obtenir : le couple (R,R), le couple (B,B) et le couple (V,V).

- $P((R,R)) = \dfrac{5}{8} \times \dfrac{4}{7} = \dfrac{5}{14}$
- $P((B,B)) = \dfrac{1}{4} \times \dfrac{1}{7} = \dfrac{1}{28}$
- $P((V,V)) = \dfrac{1}{8} \times \dfrac{0}{7} = 0$

3. En déduire la probabilité de tirer deux boules de même couleur.

La probabilité de tirer deux boules de la même couleur est :

$$P((R,R)) + P((B,B)) + P((V,V)) = \frac{5}{14} + \frac{1}{28} + 0 = \frac{11}{28}$$

⊳ **Exercice 5.** $[\![1 ; 20]\!]$ est l'ensemble des nombres entiers compris entre 1 et 20 inclus. L'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un nombre de l'ensemble $[\![1 ; 20]\!]$:

1. Quelle est la probabilité des évènements suivants :

- A : « il est un multiple de 2 »
  $A = \{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; 16; 18; 20\}$ donc $P(A) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2}$
- B : « il est un multiple de 4 »
  $B = \{4; 8; 12; 16; 20\}$ donc $P(B) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$
- C : « il est un multiple de 5 »
  $C = \{5; 10; 15; 20\}$ donc $P(C) = \dfrac{4}{20} = \dfrac{1}{5}$
- D : « il est un multiple de 2 mais pas de 4 »
  $D = \{2; 6; 10; 14; 18\}$ donc $P(D) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{4}$

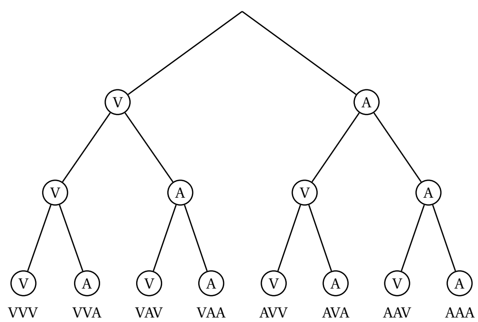
2. Calculer la probabilité de :

- $A \cap B = \{4; 8; 12; 16; 20\}$;
  $P(A \cap B) = \dfrac{5}{20} = \dfrac{1}{1}$
- $A \cup B$;
  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \dfrac{1}{2}$
- $A \cap C = \{10; 20\}$;
  $P(A \cap C) = \dfrac{2}{20} = \dfrac{1}{10}$
- $A \cup C$.
  $P(A \cup C) = P(A) + P(C) - P(A \cap C) = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{5} - \dfrac{1}{10} = \dfrac{3}{5}$

⊳ **Exercice 6.** Pour se rendre à son travail, un automobiliste rencontre trois feux tricolores. On suppose que les feux fonctionnent de manière indépendante, que l'automobiliste s'arrête s'il voit le feu orange ou rouge et qu'il passe si le feu est vert. On suppose de plus que chaque feu est vert durant un temps égal à rouge et orange (autrement dit, l'automobiliste à autant de chance de passer que de s'arrêter).

1. Faire un arbre représentant toutes les situations possibles.

On note V l'événement « le feu est vert » et A l'événement « le feu est orange ou rouge ». Les probabilités des événements V et A étant égales, il est inutile de pondérer les branches de l'arbre par les probabilités et toutes les issues sont équiprobables.



2. Quelle est la probabilité que l'automobiliste ait :

a) les trois feux verts ?
$P(VVV) = \dfrac{1}{8}$

b) deux des trois feux verts ?
Notons D cet événement : $D = \{VVA; VAV; AVV\}$.
$P(D) = \dfrac{3}{8}$

▷ **Exercice 7.** Deux lignes téléphoniques A et B arrivent à un standard. On note : E_1 : « la ligne A est occupé » et E_2 : « la ligne B est occupée ». Après étude statistique, on admet les probabilités : $p(E_1) = 0,5$; $p(E_2) = 0,6$ et $p(E_1 \cap E_2) = 0,3$. Calculer la probabilité des évènements suivants : F : « la ligne A est libre » ; G : « une ligne au moins est occupée » et H : « une ligne au moins est libre ».

▷ **Exercice 8.** Un couple de futurs parents décide d'avoir trois enfants. On fait l'hypothèse qu'ils auront, à chaque fois, autant de chances d'avoir un garçon qu'une fille et qu'il n'y aura pas de jumeaux. Calculer la probabilité des évènements :

- A : « ils auront trois filles » ;
- B : « ils auront trois enfants de même sexe » ;
- C : « ils auront au plus une fille » ;
- D : « les trois enfants seront de sexes différents ».

▷ **Exercice 9.** Une boîte contient 4 jetons sur lesquels sont écrits les 4 lettres E, G, R et U.
On choisit au hasard, successivement et sans remise les 4 lettres de cette boîte afin de former un mot de 4 lettres.

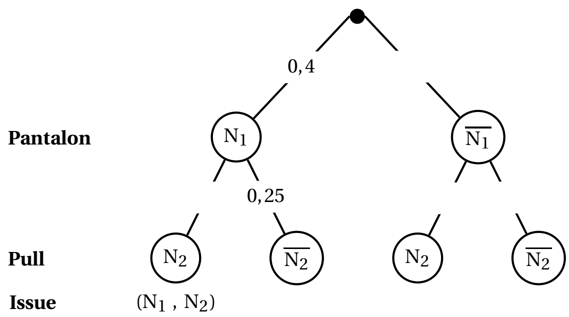
1. Combien de mots différents peut-on constituer (sans se préoccuper du sens) ?
2. Représenter cette situation à l'aide d'un arbre afin de déterminer toutes les issues possibles de cette expérience.
3. Quelle est la probabilité de former le mot GRUE ?
4. Soit l'événement A :« Le mot obtenu se termine par E ». Calculer $p(A)$.
5. Soit l'événement B :« Le mot obtenu commence par G ». Calculer $p(B)$.
6. Calculer $p(A \cap B)$ puis $p(A \cup B)$.
7. Définir par une phrase l'événement $\overline{A} \cap \overline{B}$ puis calculer sa probabilité.

▷ **Exercice 10.** Dans un restaurant un client choisi un menu qui se compose d'une entrée et un plat. Parmi les deux entrées au choix, une est composée de poisson, et parmi les trois plats au choix, un est composé de poisson. Le client choisi au hasard l'entrée et le plat.

1. Quelle est la probabilité qu'il mange du poisson en entrée ? en plat ?
2. Soit P l'événement " le client mange du poisson ".
   a) Représenter cette situation par un arbre en faisant figurer les probabilités sur les branches.
   b) Quelle est la probabilité que le client mange deux fois du poisson ?
   c) Quelle est la probabilité que le client ne mange pas de poisson ?

▷ **Exercice 11.** Pour s'habiller, Paul choisit au hasard un pantalon et un pull. Parmi les 20 pantalons, 8 sont noirs et parmi les 8 pulls, 6 sont noirs.

1. Quelle est la probabilité de l'événement N_1 : « le pantalon est noir » et quelle est la probabilité de l'événement N_2 : « le pull est noir » ?
2. Compléter l'arbre de probabilités ci-contre.
3. a) Quelle est la probabilité que Paul soit habillé tout en noir ?
   b) Quelle est la probabilité que Paul ne porte pas de noir ?



▷ **Exercice 12.** Un prof de math note de manière aléatoire les copies de ses élèves. Il affecte une note supérieure ou égale à 10 (événement noté M) avec une probabilité égale à 0,6. Ce professeur donne trois devoirs en classe ce trimestre.

1. Quelle est la probabilité qu'un élève obtienne trois fois de suite la moyenne ?
2. Quelle est la probabilité qu'il obtienne exactement deux fois la moyenne ?
3. Quelle est la probabilité qu'il obtienne au moins une fois la moyenne ?
4. Combien de fois peut-il espérer obtenir la moyenne ?

▷ **Exercice 13.** Dans un sac, on dispose de quatre jetons numérotés de 1 à 4.

1. On tire un 1^{er} jeton, on note son numéro, on replace ce jeton dans le sac puis on tire un $2^{ième}$ jeton dont on note le numéro. On effectue la somme des deux numéros obtenus.

a) Quels sont les résultats possibles ?
b) Calculer la probabilité d'obtenir chacun des résultats.
c) Calculer la probabilité d'obtenir un nombre premier ?

2. Toujours du même sac, on tire cette fois un 1$^{\text{er}}$ jeton, puis un 2$^{\text{ième}}$ jeton sans remettre le 1$^{\text{er}}$, ensuite on fait la somme des numéros.

Reprendre les question précédentes avec ce nouveau mode de tirage.

⊳ **Exercice 14.** Un dé à six faces est truqué. Pour chaque chiffre n le tableau ci-dessous indique la probabilité $p(n)$ correspondante :

n	1	2	3	4	5	6
$p(n)$	0,05	0,1	0,15	0,2	0,25	

On lance le dé et on note le numéro obtenu.

1. Calculer $p(6)$.

2. Calculer $p(5\,ou\,6)$.

3. Soit A l'événement « on obtient ni 5 ni 6 ». Calculer $p(\text{A})$.

⊳ **Exercice 15.** Un dé (à 6 faces) est truqué de la façon suivante : chaque chiffre pair a deux fois plus de chance de sortir qu'un numéro impair.

1. Calculer la probabilité d'obtenir un 6.

2. On lance deux fois le dé. (*on pourra s'aider d'un arbre*)

a) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un chiffre pair.
b) Calculer la probabilité d'obtenir deux fois un 6.

⊳ **Exercice 16.** Pour préparer ses œuvres en mosaïque, en prévision d'une « invasion » à Los Angeles, l'artiste urbain Space Invader dispose de 1500 carreaux dont 25% sont jaunes, 600 sont bleus et les autres sont rouges.
Au total 66 carreaux sont abîmés dont 15 jaunes et 4% des carreaux rouges sont abîmés.

1. Compléter le tableau ci-dessous qui décrit la situation :

carreaux	jaunes	bleus	rouges	total
abîmés				
non abîmés				
total				1500

L'artiste prend un carreau au hasard, tous les carreaux ayant la même probabilité d'être choisis. On note A, B et C les événements suivants : A : « le carreau est rouge » ; B : « le carreau n'est pas abîmé » ; C : « le carreau est bleu » .

2. Calculer les probabilités P(A), P(B) et $\text{P}(\overline{\text{C}})$.

3. a) Décrire par une phrase ce que représente l'événement $\text{A} \cap \text{B}$ puis calculer sa probabilité.
b) Décrire par une phrase ce que représente l'événement $\text{A} \cup \text{B}$ puis calculer sa probabilité.

4. L'artiste prend au hasard un carreau parmi les non abîmés. Quelle est la probabilité qu'il soit rouge? Le résultat sera donné sous forme d'une valeur décimale arrondie à 10^{-2} près.

⊳ **Exercice 17.** Un logiciel permet de filtrer les messages sur une messagerie électronique.
Les concepteurs l'ont testé pour 1000 messages et voici leurs conclusions : 70% des mails sont des spams, 95% des spams sont éliminés et 2% des mails bienvenus sont éliminés. On considère les événements suivants :

- B : « le mail est un mail bienvenu »
- S : « le mail est un spam »
- E : « le mail est éliminé »
- C : « le mail est conservé »

1. Compléter le tableau suivant :

	Nombre de spams	Nombre de mails bienvenus	Total
Nombre de mails éliminés			
Nombre de mails conservés			
Total	700		1000

2. Un message est envoyé. Utiliser le tableau pour déterminer la probabilité des événements B, S, E et C.

3. a) Définir par une phrase l'événement $B \cap E$ puis calculer sa probabilité.

b) Définir par une phrase l'événement $B \cup E$ puis calculer sa probabilité.

4. On choisit un mail parmi les mails conservés. Quelle est la probabilité que ce soit un spam ?

▷ **Exercice 18.** *Dans cet exercice, les probabilités seront arrondies si besoin au millième.*

Une enquête de satisfaction portant sur 8000 visiteurs d'un site de vente en ligne a montré que 90% des visiteurs étaient satisfaits de l'ergonomie du site internet. De plus, 20% des clients satisfaits de l'ergonomie du site ont effectué un achat, alors que 5% seulement des clients non satisfaits ont effectué un achat.

1. Combien de clients étaient satisfaits de l'ergonomie du site ?

2. Montrer que 1440 visiteurs sont satisfaits de l'ergonomie du site et ont effectué un achat.

3. Compléter le tableau ci-contre :

	ont effectué un achat	n'ont pas effectué d'achat	total
satisfaits			
non satisfaits			
total			8000

4. On interroge au hasard un des visiteurs du site sur lequel a porté l'enquête et on admet qu'il y a équiprobabilité des choix. On considère les évènements suivants :

- A : « le visiteur est satisfait du site »
- B : « le visiteur a effectué un achat »

a) Déterminer la probabilité de l'événement A , puis celle de l'événement $\overline{A}$.

b) Décrire par une phrase les évènements $A \cap B$ et $A \cup B$

c) Calculer les probabilités des événements $A \cap B$ et $A \cup B$

d) On interroge au hasard un des clients qui a effectué un achat. Quelle est la probabilité qu'il soit satisfait du site ?

▷ **Exercice 19.** Un groupe représentatif d'une population est constitué de 1 300 personnes. Il compte 667 personnes de sexe féminin. Parmi celles-ci, 168 ont moins de 20 ans et 384 ont entre 20 et 65 ans. Parmi les personnes de sexe masculin, 176 ont moins de 20 ans et 192 ont plus de 65 ans.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	Moins de 20 ans	Entre 20 et 65 ans	Plus de 65 ans	Total
Personnes de sexe féminin				
Personnes de sexe masculin				
Total				1300

Dans les questions suivantes, on donnera les résultats arrondis à 10^{-2} près.

2. On choisit au hasard une personne dans le groupe de 1300 personnes.

a) Quelle est la probabilité qu'elle soit de sexe masculin ?

b) Quelle est la probabilité qu'elle ait moins de 20 ans ?

c) Quelle est la probabilité que ce soit un homme de moins de 20 ans ?

d) Quelle est la probabilité que ce soit une femme de plus de 65 ans ?

▷ **Exercice 20.** Dans un magasin on a relevé le mode de paiement et le montant M (en euros) mentionnés sur 250 tickets de caisse. On a constaté que :

❈ tous les achats strictement inférieurs à 10 € sont payés en espèces ;

❈ la moitié des achats dont le montant M est tel que $10 \leq M < 20$ est payé en espèces ;

❈ 16% des achats sont payés par carte de crédit ;

❈ 36% des achats ne sont pas payés en espèce.

1. Compléter le tableau ci-dessous :

Mode de paiement \ Montant	$M < 10$	$10 \leq M < 20$	$M \geq 20$	Total
Espèces		38		
Chèque				
Carte de Crédit		15		
Total	106			250

2. On choisit au hasard un ticket de caisse et on considère les événements :

   A : « Le ticket indique un montant supérieur à 20 € »

   B : « Le ticket correspond à un paiement par chèque »

   Calculer la probabilité des événements : A, B, $A \cap B$ et $A \cup B$.

3. On choisit un ticket de caisse correspondant à un paiement par chèque. Quelle est la probabilité qu'il indique un montant supérieur à 20 € ?

▷ **Exercice 21.** Dans un groupe de 20 personnes, 10 personnes s'intéressent à la pêche, 8 à la lecture et 5 personnes ne s'intéressent ni à la pêche (P), ni à la lecture (L). On désigne au hasard une personne du groupe. Calculer la probabilité pour qu'elle s'intéresse

1. A l'une au moins des deux activités.

2. Aux deux activités.

▷ **Exercice 22.** Dans un club, plusieurs activités sont proposées dont le tir à l'arc et le golf. Parmi les 50 adhérents, 30 pratiquent le tir à l'arc, 18 le golf et 6 pratiquent les deux sports. Quelle est la probabilité pour qu'un adhérent choisi au hasard :

- pratique le tir à l'arc ? le golf ? les deux ?
- pratique l'un au moins des deux sports ?
- ne pratique ni le tir à l'arc, ni le golf ?

▷ **Exercice 23.** On lance un dé vert et un dé rouge à 6 faces numérotées de 0 à 5. On effectue le produit des deux chiffres obtenus et on garde le chiffre des unités. Par exemple, si on obtient 3 et 4, le produit est $3 \times 4 = 12$ donc on garde le chiffre 2.

1. Quel est l'univers des résultats possibles ? (*on pourra s'aider d'un tableau*)

2. Calculer la probabilité d'obtenir 0.

3. Calculer la probabilité d'obtenir un nombre plus grand que 4.

▷ **Exercice 24.** On lance une pièce équilibrée 4 fois successivement.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir exactement trois fois pile ?

2. Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

3. On lance maintenant n fois ($n \geq 1$) cette même pièce.

   a) Quelle est la probabilité d'obtenir au moins une fois pile ?

   b) Quelle est la probabilité d'obtenir exactement une fois pile ?