b) $\sin(x+y)\sin(x-y)$
$= (\sin(x)\cos(y)+\sin(y)\cos(x))(\sin(x)\cos(y)-\sin(y)\cos(x))$
$= \sin^2(x)\cos^2(y)-\sin^2(y)\cos^2(x)$
$= (1-\cos^2(x))\cos^2(y)-\sin^2(y)\cos^2(x)$
$= \cos^2(y)-\cos^2(x)$

$$\begin{aligned}2\sin(x+y)\sin(x-y) &= 2\cos^2(y)-2\cos^2(x)\\ &= 2\cos^2(y)-1-2\cos^2(x)+1\\ &= \cos(2y)-\cos(2x)\end{aligned}$$

49 - • $\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right)-1$
c'est-à-dire
$$\cos^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2+\sqrt{3})$$
$\frac{\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right)\geqslant 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\times\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

• $\cos\left(2\times\frac{\pi}{12}\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right)$
donc
$$\sin^2\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$$
$\frac{\pi}{12}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right)\geqslant 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{12}\right) = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{3}}$.

50 - **a)** $2\times\frac{\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$

• $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 2\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right)-1$

c'est-à-dire $\cos^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1+\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et $\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

• $\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(2\times\frac{\pi}{8}\right) = 1-2\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)$

c'est-à-dire $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right) = \dfrac{1-\cos\left(\frac{\pi}{4}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \frac{2-\sqrt{2}}{4}$

$\frac{\pi}{8}\in\left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right)\geqslant 0$ et $\sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

b) • $\frac{3\pi}{8} = \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

• $\frac{5\pi}{8} = \pi-\frac{3\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{5\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{3\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{5\pi}{8}\right) = \sin\left(\frac{3\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

• $\frac{7\pi}{8} = \pi-\frac{\pi}{8}$ donc $\cos\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) = -\frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$

et $\sin\left(\frac{7\pi}{8}\right) = \sin\frac{\pi}{8} = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$.

c) $\sin^2\left(\frac{\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{3\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{5\pi}{8}\right)+\sin^2\left(\frac{7\pi}{8}\right)$
$= \frac{2-\cancel{\sqrt{2}}}{4}+\frac{2+\cancel{\sqrt{2}}}{4}+\frac{2+\cancel{\sqrt{2}}}{4}+\frac{2-\cancel{\sqrt{2}}}{4} = 2$

51 - **a)**
$$\begin{aligned}\cos(2x) &= 2\cos^2(x)-1\\ &= 2\left(\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right)^2-1\\ &= \frac{2}{16}(6+2+2\sqrt{12})-1\\ &= 1+\frac{4}{16}\times 2\sqrt{3}-1\\ &= \frac{\sqrt{3}}{2}.\end{aligned}$$

b) Or $0<x<\frac{\pi}{2}$ donc $2x = \frac{\pi}{6}$ et $x = \frac{\pi}{12}$.

52 - **a)** $(\cos(x)+\sin(x))^2$
$$\begin{aligned}&= \cos^2(x)+2\sin(x)\cos(x)+\sin^2(x)\\ &= 1+\sin(2x).\end{aligned}$$

b) $(\cos(x)-\sin(x))^2 = 1-2\sin(x)\cos(x)$
$= 1-\sin(2x)$.

53 - **a)** $\frac{11\pi}{6} = 2\pi-\frac{\pi}{6}$ donc $\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

b) $\frac{11\pi}{6} = 2\times\frac{11\pi}{12}$

$\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right) = \cos\left(2\times\frac{11\pi}{12}\right) = 2\cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right)-1$

$$\text{donc } \cos^2\left(\frac{11\pi}{12}\right) = \frac{1+\cos\left(\frac{11\pi}{6}\right)}{2} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2+\sqrt{3}}{4}.$$

54 - **a)**
$$\begin{aligned}\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}-\frac{\cos(2x)}{\cos(x)} &= \frac{2\sin(x)\cos(x)}{\sin(x)}-\frac{2\cos^2(x)-1}{\cos(x)}\\ &= 2\cos(x)-2\cos(x)+\frac{1}{\cos(x)}\\ &= \frac{1}{\cos(x)}\end{aligned}$$

d'où $\frac{\sin(2x)}{\sin(x)}-\frac{\cos(2x)}{\cos(x)} = \frac{1}{\cos(x)}$ pour $x\neq k\frac{\pi}{2}$, $k\in\mathbb{Z}$.

55 - **a)** $\sin(3x)\cos(x)-\sin(x)\cos(3x) = \sin(3x-x)$
$= \sin(2x)$.

b)
$$\frac{\sin(3x)}{\sin(x)}-\frac{\cos(3x)}{\cos(x)} = \frac{\sin(3x)\cos(x)-\cos(3x)\sin(x)}{\sin(x)\cos(x)} = \frac{\sin(2x)}{\frac{1}{2}\sin(2x)} = 2$$

56 - **a)** $\sin^2(x) = 1-\frac{1}{9} = \frac{8}{9}$
or $0<x<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin(x) = \frac{2\sqrt{2}}{3}$.
$\sin^2 y = 1-\frac{9}{25} = \frac{16}{25}$
or $0<y<\frac{\pi}{2}$ donc $\sin(y) = \frac{4}{5}$.

b)

- $\cos(2x-y) = \cos(2x)\cos(y) + \sin(2x)\sin(y)$
$= (2\cos^2 x - 1)\cos(y) + 2\sin(x)\cos(x)\sin(y)$
$= \left(\frac{2}{9}-1\right)\times\frac{3}{5} + 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{4}{5}$
$= -\frac{21}{45} + \frac{16\sqrt{2}}{45} = \frac{16\sqrt{2}-21}{45}.$

- $\sin(2x-y) = \sin(2x)\cos(y) - \cos(2x)\sin(y)$
$= 2\sin(x)\cos(x)\sin(y) - (2\cos^2(x)-1)\sin(y)$
$= 2\times\frac{2\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{3}\times\frac{3}{5} - \left(2\times\frac{1}{9}-1\right)\frac{4}{5}$
$= \frac{12\sqrt{2}}{45} + \frac{28}{45} = \frac{28+12\sqrt{2}}{45}.$

57 -

a) $\cos(3a) = \cos(2a+a)$
$= \cos(2a)\cos(a) - \sin(2a)\sin(a)$
$= (2\cos^2(a)-1)\cos(a) - 2\cos(a)\sin^2(a)$
$= 2\cos^3(a) - \cos(a) - 2\cos(a)(1-\cos^2(a))$
$= 4\cos^3(a) - 3\cos(a).$

b) $\sin(3a) = \sin(2a+a)$
$= \sin(2a)\cos(a) + \sin(a)\cos(2a)$
$= 2\sin(a)\cos^2(a) + \sin(a)(1-2\sin^2(a))$
$= (2\sin(a)(1-\sin^2(a)) + \sin(a)(1-2\sin^2(a))$
$= 3\sin(a) - 4\sin^3(a).$

58 - a) $\cos(4a) = \cos(2\times 2a)$
$= 2\cos^2(2a) - 1$
$= 2[2\cos^2(a)-1]^2 - 1$
$= 8\cos^4(a) - 8\cos^2(a) + 1.$

b) $\sin(4a) = \sin(2\times 2a)$
$= 2\sin(2a)\cos(2a)$
$= 2\sin(a)\cos(a)(\cos^2(a) - \sin^2(a))$
$= 2\sin(a)\cos^3(a) - 2\sin^3(a)\cos(a).$

59 - a) • $\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x) = 1 - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$

or $x \in \left[0;\frac{\pi}{2}\right]$ donc $\cos(x) \geqslant 0$ et $\cos(x) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}.$

- $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x) = 2\times\frac{\sqrt{2-\sqrt{3}}}{2}\times\frac{\sqrt{2+\sqrt{3}}}{2}$
$= \frac{\sqrt{4-3}}{2} = \frac{1}{2}.$

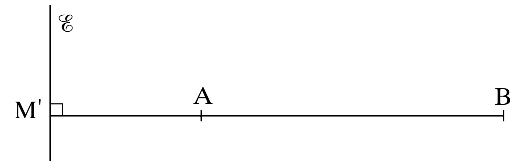
- $\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x) = \frac{2-\sqrt{3}}{4} - \frac{2+\sqrt{3}}{4} = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$

b) $\left.\begin{array}{l}\sin(2x) = \frac{1}{2}\\ \cos(2x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ 2x \in [0;\pi]\end{array}\right\}$ donc $2x = \frac{5\pi}{6}$ d'où $x = \frac{5\pi}{12}.$

60 - On note M' le projeté orthogonal de M sur (AB).

$M \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{AB} = -10$ ce qui revient à $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AB} = -10.$

$\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AB}$ sont colinéaires et de sens contraires et $-AM' \times AB = -10$ soit $AM' = 2.$

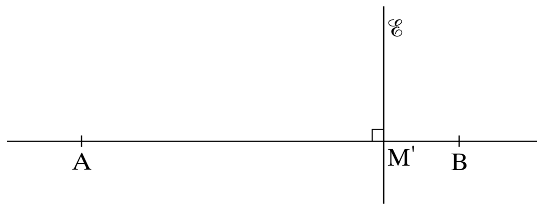


$\mathscr{E}$ est la droite perpendiculaire passant par le point M' de (AB) tel que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AB} = -10.$

61 - On note M' le projeté orthogonal de M sur (AB).

a) $M \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AB} = 20.$

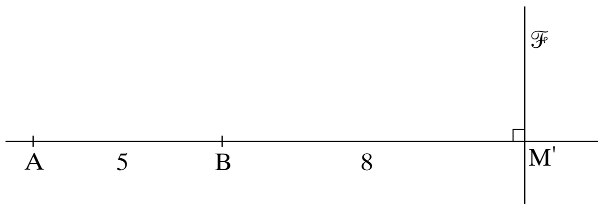
$\overrightarrow{AM'}$ et $\overrightarrow{AB'}$ sont colinéaires et de même sens et $AM' = 4.$



$\mathscr{E}$ est la perpendiculaire passant par le point M' de (AB) tel que $\overrightarrow{AM'}.\overrightarrow{AB} = 20.$

b) $M \in \mathscr{F}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{BM'}.\overrightarrow{BA} = -40.$

$\overrightarrow{BM'}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont colinéaires de sens contraires et $BM' = 8.$

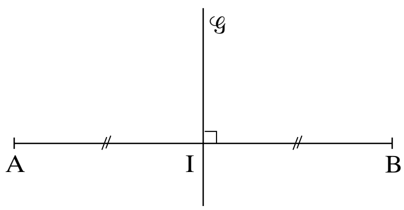


$\mathscr{F}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par le point M' tel définie par $\overrightarrow{BM'} = -\frac{8}{5}\overrightarrow{AB}.$

c) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{M'I}.\overrightarrow{AB}$

$M \in \mathscr{G}$ si et seulement si, $2\overrightarrow{M'I}.\overrightarrow{AB} = 0$ c'est-à-dire $\overrightarrow{M'I}.\overrightarrow{AB} = 0$ ou $M' = I.$

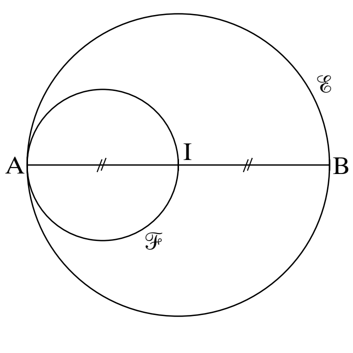
$\mathscr{G}$ est la perpendiculaire à (AB) passant par I milieu de [AB].
$\mathscr{G}$ est la médiatrice de [AB].



62 - a) $\mathscr{E}$ est le cercle de diamètre [AB].

b) $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).\overrightarrow{MA} = 2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MA}$

$M \in \mathscr{F}$ si, et seulement si, $\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{MA} = 0.$
$\mathscr{F}$ est le cercle de diamètre [AI].



63 - **a)** $4\overrightarrow{MF}+3\overrightarrow{MG} = 7\overrightarrow{MD}$ donc $\frac{3}{7}\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FD}$

$4\overrightarrow{MF}-3\overrightarrow{MG} = \overrightarrow{MH}$ donc $-3\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{FH}$.

b) $7\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH} = 0$

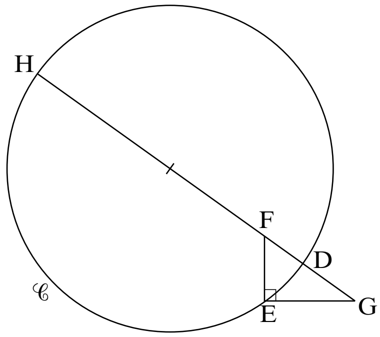
$\overrightarrow{MD}.\overrightarrow{MH} = 0$.

Le lieu de M est le cercle $\mathscr{C}$ de diamètre [HD].

c) $(4\overrightarrow{EF}+3\overrightarrow{EG}).(4\overrightarrow{EF}-3\overrightarrow{EG}) = 16\,EF^2-9\,EG^2$

$= 16\times 9-9\times 16 = 0$

donc $E \in \mathscr{C}$.

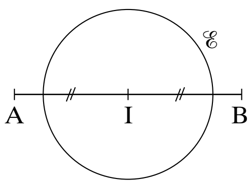


64 - **1. a)** $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB} = (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IB})$

$$= (\overrightarrow{MI}+\overrightarrow{IA}).(\overrightarrow{MI}-\overrightarrow{IB})$$
$$= \overrightarrow{MI}^2-\overrightarrow{IA}^2$$
$$= MI^2-IA^2$$

b) $M \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $MI^2-IA^2 = -4$ ce qui revient à $MI^2 = -4+9 = 5$.

c) $\mathscr{E}$ est le cercle de centre I de rayon $\sqrt{5}$.



2. $M \in \mathscr{F}$ si, et seulement si, $MI^2-IA^2 = -12$ ce qui revient à $MI^2 = -12+9 = -3$.

Cette égalité est impossible et $\mathscr{F} = \varnothing$.

66 - **a)** $MA^2-MB^2 = \overrightarrow{MA}^2-\overrightarrow{MB}^2$

$$= (\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}).$$

b) $M \in \mathscr{E}$ si, et seulement si, $MA^2-MB^2 = 20$, ce qui revient à $(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}).(\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MB}) = 20$ soit

$2\overrightarrow{MI}.\overrightarrow{BA} = 20 \quad \overrightarrow{IM}.\overrightarrow{BA} = 10$.

Avant d'aller plus loin

QCM

67 - **c)** **68** - **c)** **69** - **b)** **70** - **c)**

71 - **b)** **72** - **c)** **73** - **b)** **74** - **c)**

Vrai ou faux

75 - Faux. $\vec{n}(2;-1)$ est un vecteur normal à d.

76 - Vrai. Une équation de $\mathscr{C}$ est : $(x-1)^2+(y-2)^2 = 4$.

77 - Vrai. L'aire du triangle est :

$$S = \frac{1}{2}bc\sin(\widehat{A}) = \frac{1}{2}ca\sin(\widehat{B}) = \frac{1}{2}ab\sin(\widehat{C}).$$

78 - Faux. D'après le théorème de la médiane :

$$CA^2+CB^2 = 2\,IC^2+\frac{1}{2}AB^2.$$

79 - Faux. L'aire du triangle est :

$$S = \frac{1}{2}\times 4\times 4\times\sin(60°) = 4\sqrt{3}.$$

80 - Faux. $\vec{n}(1;2)$ vecteur normal à d et $\vec{n'}(2;1)$ vecteur normal à d'.

$\vec{n}.\vec{n'} = 1\times 2+2\times 1 = 4$

$\vec{n}.\vec{n'} \neq 0$ donc $\vec{n}$ et $\vec{n'}$ ne sont pas orthogonaux.

81 - Vrai. $\mathscr{C}$ a pour équation

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1 = 0$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 5$

$\mathscr{C}'$ a pour équation

$(x-2)^2-4+(y+1)^2-1-6 = 0$

$(x-2)^2+(y+1)^2 = 11$

$\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}'$ ont le même centre $I(2;-1)$.

82 - Vrai.

$(x-a)^2-a^2+(y+2)^2-4 = 0$

$(x-a)^2+(y+2)^2 = \underbrace{a^2+4}$.

83 - Vrai.

$\frac{7\pi}{12} = \frac{\pi}{3}+\frac{\pi}{4}$ et $\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b)-\sin(a)\sin(b)$

84 - Vrai.

$\cos(2a) = 2\cos^2(a)-1$ donc $\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2}$.