SUITES NUMERIQUES

A) GENERALITES

I/ Définition et notations

Une **suite numérique** est une fonction u de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$.
L'image de l'entier n par la suite u se note u_n.

Une suite numérique se note $u,\ (u_n)\ ou\ (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$

u_n est le **terme général** de la suite (u_n), **le terme de rang n** ou **le terme d'indice n**.

u_0 est le **terme initial** de la suite (u_n).
Une suite peut être définie sur une partie de $\mathbb{N}$, sur $\mathbb{N}^*$, etc …

Exemple :
La suite des carrés des nombres entiers est : 0, 1, 4, 9, 16, ……

On peut numéroter ces termes sous la forme :

La relation qui définit l'expression générale de u_n est : pour tout

Remarque:
Une suite peut n'être définie qu'à partir d'un certain rang n_0 ; on la note parfois $(u_n)_{n\geq n_0}$
et son **terme initial** est u_{n_0}.
La suite de terme général u_n , n'est définie que pour , on la note

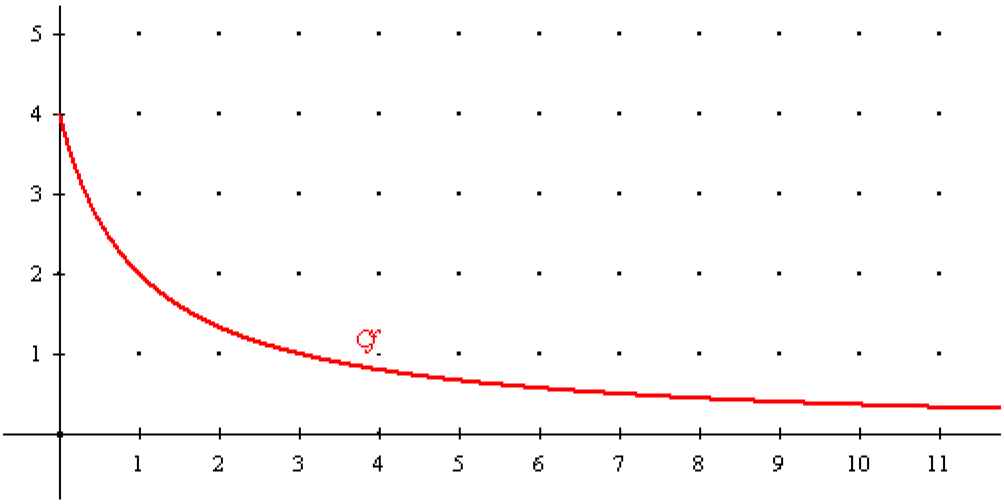
II/ Représentation d'une suite

a- La forme explicite.

Une **suite** (u_n) **est présentée sous forme explicite** lorsque le terme général u_n est exprimé en fonction de l'indice n : $u_n = f(n)$

Exemple :
$u_n = \dfrac{4}{n+1}$; ici, $u_n = f(n)\quad avec\quad f(x) = \dfrac{4}{x+1}$

Représentation graphique :
Représenter graphiquement la suite (u_n), c'est tracer l'ensemble des points de coordonnées $(n\ ;\ f(n))$. (On trace la représentation graphique de la fonction f pour x positif et on lit sur l'axe des ordonnées les différents termes de la suite pour les abscisses entières).



Représentation de $u_n = \dfrac{4}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$

b- La forme récurrente.

Une suite (u_n) **est définie par récurrence** lorsque le premier terme u_{n_0} est donné et lorsqu'un terme est exprimé en fonction du terme précédent.

Dans ce cas, il existe une fonction f telle que pour tout entier $n \geq n_0$: $\begin{cases} u_0 \text{ donné} \\ u_{n+1} = f(u_n) \end{cases}$

Exemple :

$\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = \dfrac{36}{u_n + 4} \end{cases}$; ici, $u_{n+1} = f(u_n)$ *avec* $f(x) = \dfrac{36}{x+4}$

Représentation graphique :

On trace la représentation graphique C_f de la fonction f pour x positif et on utilise la droite D d'équation $y = x$ dans un repère $(O; \vec{i}\,; \vec{j})$.

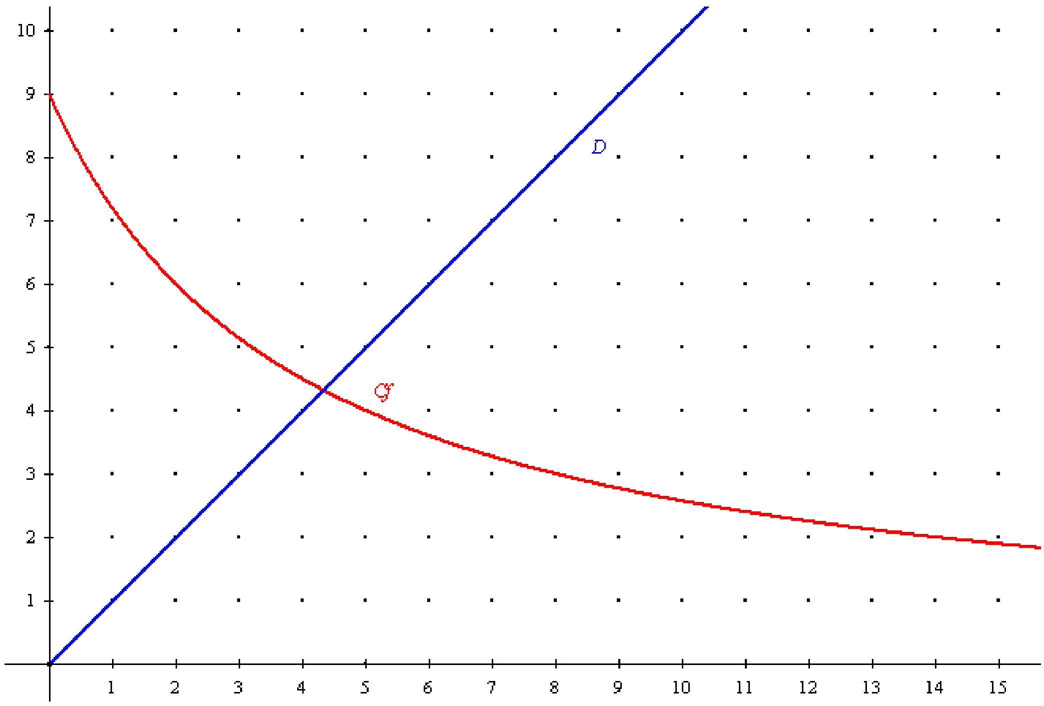
On place le point $M_0(u_0;0)$ puis on place le point A_0 de C_f d'abscisse u_0. Le point A_0 a pour coordonnées $A_0(u_0;u_1)$ car $u_1 = f(u_0)$.

On place le point $D_1(u_1;u_1)$ sur la droite D. Ce point a la même ordonnée que A_0.

On projette D_1 sur l'axe des abscisses et on obtient le point $M_1(u_1;0)$.

On réitère le procédé à partir de $M_1(u_1;0)$ pour obtenir $M_2(u_2;0)$ etc…

Les termes successifs de la suite sont donc reportés sur l'axe des abscisses.



Représentation de u_n : $\begin{cases} u_0 = 14 \\ u_{n+1} = \dfrac{36}{u_n + 4} \end{cases}$, $n \in \mathbb{N}$

Remarque :
Il faut éviter de confondre les suites définies, avec la même fonction, par une formule explicite ou par récurrence.
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 3x$, alors :

« EXPLICITE »

« RECURRENCE avec $u_0 = 1$ »

III/ Variations d'une suite

a- Suites croissantes, décroissantes

- La suite (u_n) est **croissante** si et seulement si, pour tout naturel n : $u_n \le u_{n+1}$

$$u_0 \le u_1 \le u_2 \le \; \ldots \le u_n \le u_{n+1} \le \ldots$$

- La suite (u_n) est **décroissante** si et seulement si, pour tout naturel n : $u_n \ge u_{n+1}$

$$u_0 \ge u_1 \ge u_2 \ge \; \ldots \ge u_n \ge u_{n+1} \ge \ldots$$

On définit de même une suite strictement croissante en utilisant une inégalité stricte

De même, pour une suite strictement décroissante

b- <u>Cas des suites explicites :</u>

<u>Théorème :</u>

Si $u_n = f(n)$ et si la fonction f est croissante (resp. décroissante) sur [0 ; +∞ [,

Alors la suite (u_n) est croissante (resp. décroissante)

Attention, les réciproques sont fausses !

c- <u>suites monotones</u>

- On dit qu'une suite est **monotone** lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante.
- On dit qu'une suite est strictement monotone lorsqu'elle est , soit strictement croissante, soit strictement décroissante.

d- <u>Méthodes pour étudier les variations d'une suite</u>

- *<u>On utilise les variations de la fonction f associée</u>* :

<u>Exemple</u> : $u_n = 2n + 2,\ n \in \mathbb{N}$

- *<u>On étudie le signe de</u>* $(u_{n+1} - u_n)$:

  Si $(u_{n+1} - u_n) \geq 0$ alors la suite est croissante

  Si $(u_{n+1} - u_n) \leq 0$ alors la suite est décroissante

<u>Exemple</u> : $u_n = 2^n - n,\ n \in \mathbb{N}$

- *Si $u_n > 0$ pour tout n, on compare $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ à 1 :* Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors la suite est croissante

  Si $\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq 1$ alors la suite est décroissante

Exemple : $u_n = \frac{5}{2^n}$, $n \in \mathbb{N}$

Remarque :

- Une suite peut-être ni croissante, ni décroissante
- Si pour tout entier naturel n, $u_n = u_{n+1}$, on dit que la suite est **constante** .
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq u_{n+1}$, on dit que la suite est croissante à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)

IV/ Suites bornées

a. suite majorées, minorées, bornées

Définition : Une suite u est **majorée** s'il existe un réel M, indépendant de n tel que , pour tout n , $u_n \leq M$. On dit alors que M est un majorant de la suite (u_n) .
Définition : Une suite u est **minorée** s'il existe un réel m, indépendant de n, tel que pour tout n, $u_n \geq m$. On dit alors que m est un minorant de la suite (u_n) .
Définition : Une suite u est **bornée** si elle est **à la fois majorée et minorée**, c'est-à-dire s'il existe deux réels m et M indépendants de n tels que, pour tout n, $m \leq u_n \leq M$.

Exemples : soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{2}{n+1}$ $\quad pour\ \ tout\ \ n \in \mathbb{N}$

Remarques :

- Une suite croissante est minorée par son terme initial ; une suite décroissante est majorée par son terme initial.
- S'il existe un entier naturel p tel que, pour tout entier $n \geq p$, on ait $u_n \leq M$, on dit que la suite est majorée à partir du rang p . (de même pour les autres notions vues ci-dessus)

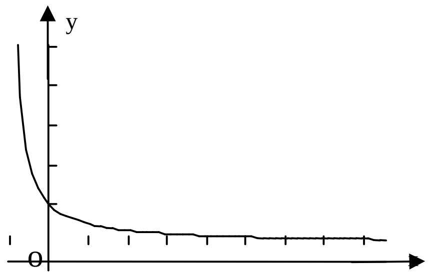
b. **Cas des suites explicites :**

Si $u_n = f(n)$

- Si f est majorée sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$, alors (u_n) est majorée.
- Si f est minorée sur $[\ 0\ ;+\infty\ [$, alors (u_n) est minorée.

Exemple :

Soit (u_n) la suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n+1}$

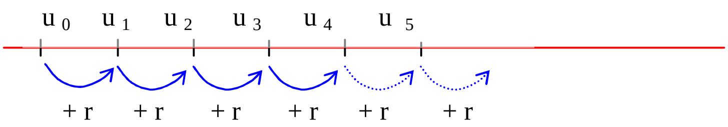


B) SUITES ARITHMETIQUES

I/ Définition par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite arithmétique** , s'il existe un réel r tel que pour tout entier naturel n , on ait :

Le réel r est appelé **raison** de la suite (u_n). r peut-être positif ou négatif .



On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en ajoutant r .

Exemple :

- La suite des entiers naturels est une suite arithmétique de raison 1 .
- La suite des entiers naturels impairs est une suite arithmétique de raison 2 .

II/ Définition par une formule explicite

Soit (u_n) une suite arithmétique de premier terme u_0 et de raison r .
Alors, pour tout entier naturel n , on a :

En effet :

Exemple :
Soit u_n la suite arithmétique définie par $u_0 = 7$ et r = 12 ,

alors $u_6 =$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r .
Pour tous entiers naturels p , on a :

Intérêts :

- Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite arithmétique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)
- Cette formule permet aussi de calculer la raison d'une suite arithmétique dont on connaît deux termes.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite arithmétique telle que $u_2 = 4$ et $u_4 = 10$.

- Soit (u_n) une suite arithmétique définie par $u_{10} = 30$ et $r = 2$.

Représentation graphique : Les termes de la suite sont les ordonnées des points de la droite D d'équation : $y = rx + u_0$ dont les abscisses sont des entiers naturels.

III/ Méthode

Pour démontrer qu'une suite est arithmétique, il faut montrer que la différence entre deux termes consécutifs $u_{n+1} - u_n$ est constante, ou bien que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 + nr$, u_0 et r étant des réels ne dépendant pas de n.
Pour démontrer qu'une suite n'est pas arithmétique, il suffit de montrer que la différence entre deux termes consécutifs n'est pas constante, par exemple : $u_2 - u_1 \neq u_1 - u_0$.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite définie par $u_n = (n+1)^2 - (n+3)^2 \quad pour \quad n \in \mathbb{N}$

- Soit (u_n) une suite définie par $u_n = (n+1)^2 - 4n \quad pour \quad n \in \mathbb{N}$

IV/ Monotonie

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r.
(u_n) est strictement croissante si et seulement si r $>$ 0
(u_n) est strictement décroissante si et seulement si r $<$ 0
(u_n) est constante si et seulement si r = 0

Exemple : soit (u_n) définie par $u_0 = 15 \ \ et \ \ u_{n+1} = u_n + 3$

V/ Somme de termes consécutifs

a- Nombre de termes d'une somme

$u_1 + u_2$ est une somme de deux termes ; $u_1 + u_2 + u_3$ est une somme de trois termes
De manière générale , $u_1 + u_2 + ... + u_p$ est une somme de p termes notée S_p .

Pour déterminer le nombre de termes de la somme $u_{12} + u_{13} + ... + u_{67}$, on écrit : $u_{1+11} + u_{2+11} + ... + u_{56+11}$
La somme a donc 56 termes, c'est à dire : $67 - 12 + 1$
Plus généralement :

Le nombre de termes de la somme $u_p + u_{p+1} + ... + u_q$ (p , q entiers naturels tels que p $\leq$ q) est :

b- Somme des n premiers entiers naturels

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = n$.
Calculons la somme $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + 2 + \ ... + n$

On peut écrire :

En additionnant membre à membre, on obtient :

D'où :

c- Cas général : Somme des termes consécutifs d'une suite arithmétique

En utilisant la même idée,

On montre de façon plus générale que :

La somme de termes consécutifs d'une suite arithmétique est égale au **produit du nombre de termes** par **la demi-somme des termes extrêmes** .

Exemple :

- Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 15$

Calcul de $S_{13} = u_0 + u_1 + ... + u_{13}$

- Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 2 et de premier terme $u_0 = 10$.

La somme $S = u_8 + u_9 + ... + u_{15} =$

C) SUITES GEOMETRIQUES

I/ définition par récurrence

On dit qu'une suite (u_n) est une **suite géométrique** , s'il existe un réel q tel que pour tout entier naturel n , on ait :

Le réel q est appelé **raison** de la suite (u_n) . q (non nul) peut-être positif ou négatif

$u_0 \xrightarrow{\times q} u_1 \xrightarrow{\times q} u_2 \xrightarrow{\times q} u_3 \xrightarrow{\times q} u_4 \xrightarrow{\times q} u_5 \rightarrow \cdots$

On passe d'un terme de la suite au terme suivant, en multipliant par q .

Exemple :

- Soit (u_n) la suite des puissances de 2 , définie par $u_n = 2^n$

  Pour tout entier naturel n , on a $u_{n+1} =$

  Cette suite est donc une suite géométrique de raison et de premier terme .

- Soit (u_n) la suite définie par $u_n = n5^n$

  La suite (u_n) n'est donc pas une suite géométrique.

II/ définition par une formule explicite

Soit (u_n) une suite géométrique de premier terme u_0 et de raison q .

Alors, pour tout entier naturel n , on a :

En effet:

Exemple **:** Soit (u_n) la suite géométrique définie par $u_0 = 8 \quad et \quad q = 3$

Alors, $u_5 =$

Plus généralement :

Soit (u_n) une suite géométrique de raison q . Pour tout entier naturel p , on a :

Intérêt : Cette formule permet de calculer n'importe quel terme d'une suite géométrique dès que l'on connaît la raison et un terme quelconque (il n'est pas nécessaire de connaître u_0)

Exemples :

- Soit (u_n) la suite géométrique définie par $u_{10} = 30 \;\; et \;\; q = 2$

  On a

- Soit (u_n) la suite géométrique telle que $u_2 = 5 \quad et \quad u_8 = 320$

Attention : Cette formule ne permet pas de calculer la raison d'une suite géométrique dont on connaît deux termes .

Représentation graphique : Si q est positif, les termes de la suite sont les ordonnées des points de la courbe C d'équation $y = u_0 q^x$, dont les abscisses sont des entiers naturels.

III/ Méthode

Pour démontrer qu'une suite de termes non nuls est géométrique, il faut montrer que le quotient entre deux termes consécutifs $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constant, ou bien que pour tout entier naturel n, $u_n = u_0 q^n$, u_0 et q étant des réels ne dépendant pas de n.

Pour démontrer qu'une suite de termes non nuls n'est pas géométrique, il suffit de montrer que le quotient entre deux termes consécutifs n'est pas constant, par exemple : $\frac{u_2}{u_1} \neq \frac{u_1}{u_0}$.

Exemples :

- Soit (u_n) une suite définie par $u_n = \frac{3}{2^n} \quad pour \quad n \in \mathbb{N}$

- Soit (u_n) une suite définie par $u_n = \dfrac{1}{n^2} \quad pour \;\; n \in \mathbb{N}^*$

II/ Monotonie

Soit q un réel non nul et (u_n) la suite géométrique de terme général $u_n = u_0 q^n$

- <u>Si q > 1</u> , la suite de terme général q^n **est strictement croissante.**
  La suite (u_n) est croissante si u_0 est positif et décroissante si u_0 est négatif.

- <u>Si 0 < q < 1</u> , la suite de terme général q^n **est strictement décroissante.**
  La suite (u_n) est décroissante si u_0 est positif et croissante si u_0 est négatif.

- <u>Si q = 1</u> , la suite de terme général q^n **est constante, donc la suite (u_n) est constante.**

- <u>Si q < 0</u> , la suite de terme général q^n **n'est pas monotone.**

<u>Exemple</u> :

Soit (u_n) une suite définie par $u_n = \dfrac{3}{2^n} \quad pour \;\; n \in \mathbb{N}$

IV/ Somme de termes consécutifs

a- <u>Etude d'un exemple fondamental</u> : SUITE GEOMETRIQUE DE PREMIER TERME $u_0 = 1$

On considère la suite (u_n) définie, pour tout entier naturel n , par $u_n = q^n \quad (q \neq 0 \;\; et \;\; q \neq 1)$.

Calculons la somme $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n = 1 + q + q^2 + ... + q^n$

On peut écrire :

Par soustraction membre à membre, on obtient :

D'où :

b- *Cas général : Somme des termes consécutifs d'une suite géométrique*

Pour calculer la somme de termes consécutifs d'une suite géométrique de raison q , on applique la formule suivante :

Exemple :

- Soit (u_n) la suite géométrique définie par $u_n = 2^n$

La somme $S_n = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^n =$

- Soit (u_n) la suite arithmétique de raison 4 et de premier terme $u_0 = 15$

Calcul de $S_8 = u_0 + u_1 + ... + u_8$

D- LIMITES DE SUITES

I/ Définitions :

Définition 1 :
On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ, si et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite sauf un nombre fini d'entre eux.

Définition 2 :
On dit que la suite (u_n) a pour limite ℓ, si et seulement si, tout intervalle ouvert contenant ℓ contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang.

Ces deux définitions sont équivalentes.

On écrit alors :

On dit que la suite (u_n) **converge vers** ℓ ou est **convergente vers** ℓ.

Lorsqu'une suite n'admet pas de limite finie, c'est à dire, lorsqu'elle admet une limite infinie ou lorsqu'elle n'admet pas de limite, on dit qu'elle **diverge** ou qu'elle est **divergente**.

Théorème :
Si une fonction f admet une limite l en $+\infty$ (l désignant soit un réel ,soit $+\infty$, soit $-\infty$) alors la suite de terme général $u_n = f(n)$ admet aussi l pour limite.

Exemples : soit (u_n) définie par $u_n = 2 + \dfrac{5}{n+3} \quad pour \ \ tout \ n \in \mathbb{N}$

II/ Limites de suites de référence :

Les suites de terme général $\sqrt{n},\ n,\ n^2,\ n^3,\ n^p \ \ avec \ \ p \in \mathbb{N}^*$, divergent vers $+\infty$.

Les suites de terme général $\dfrac{1}{\sqrt{n}}, \dfrac{1}{n}, \dfrac{1}{n^2}, \dfrac{1}{n^3}, \dfrac{1}{n^p} \ \ avec \ \ p \in \mathbb{N}^*$, convergent vers **0**.

Soit q un nombre réel,

- Si $|q| < 1$, alors $\lim q^n = 0$
- Si $q > 1$, alors $\lim q^n = +\infty$
- Si $q \leq -1$, alors la suite de terme général q^n n'a pas de limite.

III/ Suites arithmétiques et géométriques :

Limite d'une suite arithmétique :

Soit (u_n) une suite arithmétique de raison r (r $\neq$ 0)

Si r > 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$; la suite diverge

Si r < 0, $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$; la suite diverge

Remarque : si r = 0, la suite est constante ; elle converge vers u_0

Exemples : soit (u_n) définie par $u_0 = 15$ *et* $u_{n+1} = u_n + 3$

Limite de la suite géométrique de terme général $u_n = u_0 q^n$ **,avec q $\neq$ 0**

- **Si q > 1** , $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si u_0 est positif
  $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$ si u_0 est négatif
  la suite diverge
- **Si q = 1** , $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 1$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = u_0$; **la suite converge vers** u_0 **.**
- **Si -1 < q < 1** , $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$; donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$; **la suite converge vers 0.**
- **Si q $\leq$ -1** , les termes de la suite sont alternativement positifs et négatifs avec , $\lim\limits_{n\to+\infty} |u_n| = +\infty$; La suite n'a pas de limite ; **la suite diverge.**

Exemples :

soit (u_n) définie par $u_n = -35 \times 1,05^n$

soit (u_n) définie par $u_n = 0,9^n$

IV/ Limites et opérations

Propriété : Les règles opératoires vues sur les limites de fonctions peuvent être utilisées de la même façon pour les limites de suites.

L et L' désignent des nombres réels. (u_n) *et* (v_n) sont des suites

- On note pas FI : Forme indéterminée.
- * signifie qu'il faut appliquer la règle des signes.

Limite de la suite de terme général $w_n = k\,u_n$ (où k est un réel donné)

Si (u_n) admet pour limite	L	$+\infty$	$-\infty$
Alors, (w_n) a pour limite		*	*

Limite de la suite de terme général $w_n = u_n + v_n$

Si (u_n) admet pour limite	L	L	L	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$
Si (v_n) admet pour limite	L'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
Alors, (w_n) a pour limite						

Limite de la suite de terme général $w_n = u_n . v_n$

Si (u_n) admet pour limite	L	L	∞	0
Si (v_n) admet pour limite	L'	∞	∞	$+\infty$ ou $-\infty$
Alors, (w_n) a pour limite		*	*	

Limite de la suite de terme général $w_n = \dfrac{u_n}{v_n}$

Cas où L' n'est pas nul — Cas où L' est nul

Si (u_n) a pour limite	L	L	∞	$\pm\infty$	L ou ∞	0
Si (v_n) a pour limite	L'	$\pm\infty$	L'	$\pm\infty$	0	0
Alors, (w_n) a pour limite			*		*	

Exemple :

soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{n+1}{n^2}$ $\quad pour\ n \in \mathbb{N}^*$

V/ Théorèmes de comparaison

1- Théorème d' encadrement dit « théorème des gendarmes »

Soient l un réel, (u_n), (v_n) et (w_n) trois suites vérifiant :

A partir d'un certain rang, $v_n \le u_n \le w_n$

$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = l$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = l$

alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$

Exemple:

soit (u_n) définie par $u_n = \dfrac{\sqrt{n^2+1}}{n}$ $pour\ \ n \in \mathbb{N}^*$

Soient l un réel, (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :

A partir d'un certain rang, $|u_n - l| \le v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$

alors la suite (u_n) est convergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = l$

Exemple :

2- Théorèmes de majoration, minoration

Soient l un réel, (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :

A partir d'un certain rang, $v_n \le u_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$

alors la suite (u_n) est divergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = +\infty$

Soient l un réel, (u_n) et (v_n) deux suites vérifiant :

A partir d'un certain rang, $u_n \le v_n$

et $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$

alors la suite (u_n) est divergente et $\lim\limits_{x\to+\infty} u_n = -\infty$