ثانوية موسى بن نصير	فرض محروس رقم 05	2 بكالوريا علوم رياضية
نيابة الخميسات	الدورة الثانية : 2010/2009	ذ : عبدالله بن لختير
		مدة الانجاز : أربع ساعات

التمرين رقم 01:

$(\mathrm{E},+,\cdot)$ هو الفضاء المتجهي الحقيقي لمجموعة الدوال العددية المعرفة من $\mathbb{R}^{*+}$ نحو $\mathbb{R}$.

لكل $(a,b)\in\mathbb{R}^2$ و لكل $x\in\mathbb{R}^{*+}$ ، نضع : $\mathrm{f}_{(a,b)}(x)=x^a e^{bx}$ و $\varphi_{(a,b)}(x)=\ln\left[\mathrm{f}_{(a,b)}(x)\right]$.

و نعتبر المجموعة : $\mathrm{F}=\left\{\varphi_{(a,b)}\in\mathrm{E}/(a,b)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

1)- بين أن F فضاء متجهي جزئي من $(\mathrm{E},+,\cdot)$.

2)- بين أن $\left(\varphi_{(1,0)};\varphi_{(0,1)}\right)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathrm{F},+,\cdot)$ ، ثم إستنتج $\dim(\mathrm{F})$.

التمرين رقم 02:

في الحلقة $(\mathrm{M}_2(\mathbb{R}),+,\times)$ نعتبر المصفوفة المربعة : $A=\begin{pmatrix}0 & -q\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ حيث q عدد حقيقي معلوم .

و لتكن المجموعة الجزئية : $\mathrm{E}=\left\{M\in\mathrm{M}_2(\mathbb{R})/MA=AM\right\}$.

1)- أ- بين أن $(\mathrm{E},+,\times)$ حلقة واحدية .

ب- بين أن : $A^2+q.I=\theta$ ، حيث θ هي المصفوفة المنعدمة و I المصفوفة الوحدة .

ج- إستنتج أنه إذا كان $q\in\mathbb{R}^-$ فإن الحلقة $(\mathrm{E},+,\times)$ غير كاملة .

2)- نفترض في هذا السؤال أن $q\in\mathbb{R}^{*+}$ ، و نضع : $\omega=i\sqrt{q}$.

أ- بين أن : $\mathrm{E}=\left\{M_{(x,y)}=\begin{pmatrix}x & -qy\\ y & x\end{pmatrix}/(x,y)\in\mathbb{R}^2\right\}$.

ب- بين أن الأسرة $\mathrm{B}(1,\omega)$ أساس للفضاء المتجهي الحقيقي $(\mathbb{C},+,\cdot)$.

ج- نعتبر التطبيق φ المعرف من $\mathbb{C}$ نحو E بما يلي : $\varphi(z)=\varphi(x+\omega y)=M_{(x,y)}$.

⇦ بين أن φ تشاكل تقابلي من $(\mathbb{C}^*,\times)$ نحو $(\mathrm{E}^*,\times)$.

د- إستنتج بنية $(\mathrm{E}^*,\times)$ ، ثم بين أن $(\mathrm{E},+,\times)$ جسم تبادلي .

3)- أثبت أن الحلقة $(\mathrm{E},+,\times)$ تكون جسما إذا و فقط إذا كان : $q\in\mathbb{R}^{*+}$.

♦ **التمرين رقم 03:**

ليكن a عددا صحيحا طبيعيا بحيث : $a \wedge 10 = 1$.

1)- بين أن : $a^4 \equiv 1[2]$ و $a^4 \equiv 1[5]$ ، ثم إستنتج أن : $a^4 \equiv 1[10]$.

2)- بين بالترجع أن لكل $k \in \mathbb{N}$: $a^{4\times10^k} \equiv 1\left[10^{k+1}\right]$ (لاحظ أن : $x^{10} - 1 = (x-1)\sum_{p=0}^{9} x^p$) .

3)- إستنتج أنه لكل $k \in \mathbb{N}$: $a^{8\times10^k+1} \equiv a\left[10^{k+1}\right]$.

4)- حدد عددا صحيحا طبيعيا N بحيث كتابة N^3 في نظمة العد العشري تنتهي ب 123456789 .

♦ **التمرين رقم 04:**

ليكن α و β عددين عقديين معلومين و $j = e^{\frac{2i\pi}{3}}$.

و مهما يكن z من $\mathbb{C}$ ، نضع : $\mathrm{f}(z) = z^3 + \alpha z^2 + \beta z$.

1)- أ- بين أن : $\mathrm{f}(1) + \mathrm{f}(j) + \mathrm{f}(j^2) = 3$.

ب- إستنتج أن : $\left|\mathrm{f}(1)\right| + \left|\mathrm{f}(j)\right| + \left|\mathrm{f}(j^2)\right| \geq 3$.

ج- بين أن : $\left|\mathrm{f}(1)\right|$ أو $\left|\mathrm{f}(j)\right|$ أو $\left|\mathrm{f}(j^2)\right|$ أكبر من أو يساوي 1 .

2)- المستوى العقدي (P) منسوب إلى معلم متعامد ممنظم و مباشر $(O,\vec{u},\vec{v})$.

نعتبر مثلثا ABC مباشر و متساوي الأضلاع مركزه O بحيث لحق النقطة A عدد حقيقي r موجب قطعا و لتكن I و J نقطتين من (P) لحقاهما على التوالي a و b .

و نأخذ فيما يلي : $\alpha = -\dfrac{a+b}{r}$ و $\beta = \dfrac{ab}{r^2}$.

أ- بين أن لحقي النقطتين B و C هما على التوالي : rj و rj^2 .

ب- بين أن : $BO.BI.BJ = r^3\left|\mathrm{f}(j)\right|$ ، ثم أحسب $CO.CI.CJ$ و $AO.AI.AJ$.

ج- بين أن المثلث ABC يقبل على الأقل رأسا S بحيث : $SO.SI.SJ \geq r^3$.

♦ التمرين رقم 05:

← الجزء الأول:

نعتبر الدالة f المعرفة على المجال $I=\left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ بما يلي : $f(x)=-\ln(1+\sin x)$.

1)- أ- ضع جدول تغيرات f .

ب- بين أن f تقبل دالة عكسية معرفة على مجال J ينبغي تحديده .

ج- بين أن الدالة f^{-1} قابلة للإشتقاق على J ، ثم أحسب $\left(f^{-1}\right)'(x)$ لكل $x\in J$.

2)- لتكن φ الدالة المعرفة على المجال $]-\ln 2;+\infty[$ بما يلي : $\varphi(x)=\frac{-1}{\sqrt{2e^x-1}}$.

أ- ضع جدول تغيرات φ ، ثم أرسم المنحنى (C_φ) في معلم متعامد و ممنظم $(O,\vec{i},\vec{j})$.

ب- أحسب مساحة الحيز المستوي المحصور بين (C_φ) و (Ox) و المستقيمين : $x=0$ و $x=\ln 2$.

← الجزء الثاني:

ليكن $n\in\mathbb{N}^*$ و لكل $x\in[0;+\infty[$ ، نضع : $G_n(x)=\int_0^x\left[\varphi(t)\right]^n dt$.

1)- أ- أحسب $G_1(x)$ بدلالة $f^{-1}(x)$ ، ثم إستنتج أن : $\lim\limits_{x\to+\infty}G_1(x)=-\frac{\pi}{2}$.

ب- لكل $t\in]-\ln 2;+\infty[$ ، نضع : $h(t)=\ln\left(2-e^{-t}\right)$ ، بين أن : $h'(t)=\left[\varphi(t)\right]^2$.

ج- أحسب $G_2(x)$ لكل $x\in[0;+\infty[$ ، ثم إستنتج : $\lim\limits_{x\to+\infty}G_2(x)$.

2)- أ- أثبت أن : $\left(\forall t\in[0;+\infty[\right);-e^{-\frac{t}{2}}\le\varphi(t)\le 0$.

ب- ليكن $x\in[0;+\infty[$ ، بين أن : $\left(\forall n\in\mathbb{N}^*\right);\left|G_n(x)\right|\le\frac{2}{n}$.

ج- إستنتج : $\lim\limits_{n\to+\infty}G_n(x)$ لكل $x\in[0;+\infty[$.

3)- أ- بين أن : $\left(\forall t\in[0;+\infty[\right);\varphi(t)+\left[\varphi(t)\right]^3=-2\varphi'(t)$.

ب- إستنتج أن لكل $n\in\mathbb{N}^*$ و $x\in[0;+\infty[$: $G_n(x)+G_{n+2}(x)=\frac{-2}{n}\left(\left[\varphi(t)\right]^n-(-1)^n\right)$.

4)- لكل $n\in\mathbb{N}^*$ ، نضع : $\mathrm{u}_n=G_n\left(\ln\frac{5}{2}\right)$ و $\mathrm{v}_n=\frac{2\times(-1)^n}{n}\left(\frac{1}{2^n}-1\right)$ و $\mathrm{w}_n=(-1)^n\times\mathrm{u}_{2n}$.

أ- أحسب u_2 ، ثم تحقق من أن : $(\forall n\in\mathbb{N}^*);\mathrm{u}_{n+2}+\mathrm{u}_n=\mathrm{v}_n$.

ب- بين أن : $(\forall n\in\mathbb{N});\mathrm{w}_{n+1}=(-1)^{n+1}\times\mathrm{v}_{2n}+\mathrm{w}_n$.

5)- أحسب النهاية : $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{3}{4}-\frac{15}{32}+...+\frac{(-1)^n\times(1-4^n)}{n.4^n}\right)$.

إنتهـــى الـموضــوع .