La calculatrice est autorisée. Les 5 exercices sont indépendants.

Une grande part de la notation sera accordée à la rédaction et aux justifications données (plutôt qu'au résultat lui-même)

Exercice 1 *Règles de calculs* (4 points)

Simplifier au maximum chacun des nombres proposés :

$$A = \ln\left(\sqrt{80}\right) - \frac{1}{2}\ln 5$$

$$B = \ln\left(\sqrt{6}-1\right) + \ln\left(\sqrt{6}+1\right) - \ln\left(\sqrt{100}\right) - \ln\frac{1}{8}$$

$$C = \frac{8\ln 4}{\mathbf{e}^{\frac{3}{4}\ln 16}}$$

$$D = \ln\left[\left(\mathbf{e}^{x}+\mathbf{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathbf{e}^{x}-\mathbf{e}^{-x}\right)^2\right]$$

Exercice 2 *En vrac* (4 points)

Toutes les questions suivantes sont indépendantes

1. Résoudre l'inéquation : $(\ln x)^2 - 29\ln x + 198 < 0$
2. Démontrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$: $2x \leqslant \mathbf{e}^{x}$
3. Résoudre l'équation différentielle : $y' = 5y$ sachant que $y(0) = 3$
4. Étudier la limite suivante : $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x+1)}{x}$

Exercice 3 *Détermination de l'expression d'une fonction* (3 points)

On considère une fonction f définie, sur $\mathbb{R}$, par :

$$f(x) = (a\,x^2 + bx + c)\,\mathbf{e}^{-x}$$

On note C sa représentation graphique dans un repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

On sait que la courbe C passe par le point $A(0 ; 1)$ et qu'elle admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1. On sait aussi que $f'(0) = -6$.

Déterminer les coefficients a, b et c.

Exercice 4 *Une fonction de Gompertz* **(4 points)**

On considère la fonction f définie, pour $x \in \mathbb{R}$, par :

$$f(x) = \mathbf{e}^{-2\mathbf{e}^{-3x}}$$

1. Calculer $f(0)$.
2. Étudier les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. Calculer la dérivée f' de f. En déduire le tableau de variations de f.
4. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $x_0 = \dfrac{1}{3}\ln 2$.

Exercice 5 *Injection d'une substance médicamenteuse* **(5 points)**

Lorsqu'on injecte dans le sang d'un malade une quantité $Q(0)$ d'une substance médicamenteuse, celle-ci est progressivement éliminée, à chaque instant t (exprimé en heures), avec une vitesse proportionnelle à la quantité restante $Q(t)$ de cette substance. On a donc :

$$Q'(t) = -aQ(t)$$

(où a est une constante strictement positive)

1. Exprimer $Q(t)$ en fonction de $Q(0)$, a et t.
2. On suppose que $Q(0) = 50$ mg . L^{-1}.

   Au bout d'une heure, il ne reste plus que 25 mg . L^{-1} de substance médicamenteuse dans le sang du patient. Calculer a.
3. Dans cette question, on suppose dorénavant que pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$:

   $$Q(t) = 50\,\mathbf{e}^{-t\ln 2}$$

   a. Déterminer la limite de Q lorsque t tend vers $+\infty$. Étudier le sens de variation de la fonction Q sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Tracer la courbe C représentant la fonction Q sur $\mathbb{R}_+^*$.

   c. Pour maintenir le traitement, on réinjecte, toutes les heures, 50 mg . L^{-1} du médicament dans le sang du malade. On note R_n la quantité de substance présente dans le sang après n heures (immédiatement après la nouvelle injection).

   On a donc $R_0 = Q(0) = 50$ et $R_1 = Q(1) + 50 = \dfrac{1}{2}R_0 + 50 = 75$ mg . L^{-1}.

   (i) Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\quad R_{n+1} = \dfrac{1}{2}R_n + 50$

   (ii) Exprimer R_n en fonction de n. (On pourra chercher α tel que $\alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 50$ et poser $v_n = R_n - \alpha$)

   (iii) En déduire la limite de la suite (R_n).
   Donner une interprétation de cette limite.

Exercice 1 *Règles de calculs* **(4 points)**

Simplifier au maximum chacun des nombres proposés :

$$A = \ln\left(\sqrt{80}\right) - \frac{1}{2}\ln 5 = \frac{1}{2}(\ln 80 - \ln 5) = \frac{1}{2}\ln 16 = \ln 4$$

$$B = \ln\left(\sqrt{6}-1\right) + \ln\left(\sqrt{6}+1\right) - \ln\left(\sqrt{100}\right) - \ln\frac{1}{8} = \ln\left(\left(\sqrt{6}-1\right)\left(\sqrt{6}+1\right)\right) - \ln 10 + \ln 8 = \ln 5 + \ln 8 - \ln 10 = \ln 4$$

$$C = \frac{8\ln 4}{\mathbf{e}^{\frac{3}{4}\ln 16}} = \frac{8\ln 4}{\mathbf{e}^{\frac{3}{2}\ln 4}} = \frac{8\ln 4}{\mathbf{e}^{3\ln 2}} = \frac{8\ln 4}{\mathbf{e}^{\ln(2^3)}} = \ln 4$$

$$D = \ln\left[\left(\mathbf{e}^{x} + \mathbf{e}^{-x}\right)^2 - \left(\mathbf{e}^{x} - \mathbf{e}^{-x}\right)^2\right] = \ln\left(\mathbf{e}^{2x} + 2 + \mathbf{e}^{-2x} - \mathbf{e}^{2x} + 2 - \mathbf{e}^{-2x}\right) = \ln 4$$

On remarque que $A = B = C = D = \ln 4$

Exercice 2 *En vrac* **(4 points)**

1. Contraintes : l'inéquation proposée n'a de sens que pour des réels $x \in \mathbb{R}_+^*$.

   Posons $X = \ln x$, ainsi notre inéquation équivaut à :

   $$X^2 - 29X + 198 < 0$$

   Il s'agit là d'une inéquation du second degré. Son discriminant est $\Delta = b^2 - 4ac = 49 = 7^2$.

   Comme Δ est strictement positif, le trinôme $X^2 - 29X + 198$ possède deux racines réelles qui sont :

   $$X_1 = \frac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a} = 11 \text{ et } X_2 = \frac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = 18$$

   On en déduit la factorisation suivante :

   $$(X - 11)(X - 18) < 0$$

   $$(\ln x - 11)(\ln x - 18) < 0$$

   Étudions le signe de chaque facteur à l'aide d'un tableau :

x	0		$\mathbf{e}^{11}$		$\mathbf{e}^{18}$		$+\infty$	Justification des signes
signe de $(\ln x - 11)$	‖	$-$	0	$+$		$+$		$\ln x - 11 \geqslant 0 \iff x \geqslant \mathbf{e}^{11}$
signe de $(\ln x - 18)$	‖	$-$		$-$	0	$+$		$\ln x - 18 \geqslant 0 \iff x \geqslant \mathbf{e}^{18}$
signe du produit	‖	$+$	0	$-$	0	$+$		

   Conclusion : $S =]\mathbf{e}^{11} ; \mathbf{e}^{18}[$

2. On utilise la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \mathbf{e}^{x} - 2x$

   Cette fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$ (car différence de fonctions qui le sont) et pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a :

$$f'(x) = \mathbf{e}^x - 2$$

On a : $\quad f'(x) \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x - 2 \geqslant 0 \iff \mathbf{e}^x \geqslant 2$

Et comme la fonction ln est strictement croissante sur $\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\mathbf{e}^x \geqslant 2 \iff x \geqslant \ln 2$$

La fonction f est donc strictement croissante sur [ln 2 ; +∞[et strictement décroissante sur]–∞ ; ln 2].

Elle admet donc un minimum en ln 2 égal à :

$$f(\ln 2) = \mathbf{e}^{\ln 2} - 2\ln 2 = 2(1 - \ln 2) > 0 \quad \text{car } \ 2 < \mathbf{e}$$

Donc la fonction f est positive (même strictement) sur $\mathbb{R}$ (puisque son minimum l'est), d'où pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\mathbf{e}^x - 2x \geqslant 0$$

$$2x \leqslant \mathbf{e}^x$$

3. On rappelle que les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ky$ sont de le forme :

$$y(x) = A\,\mathbf{e}^{kx}$$

La constante A se calculant à l'aide d'une condition initiale. Ici, on obtient :

$$y(x) = A\,\mathbf{e}^{5x}$$

La condition $y(0) = 3$ nous donne : $\quad A = 3$

Finalement : $\quad y(x) = 3\,\mathbf{e}^{5x}$

4. On se ramène à des limites connues en écrivant :

$$\frac{\ln(x+1)}{x} = \frac{\ln(x+1)}{x+1} \times \frac{x+1}{x}$$

On sait que :

$$\begin{cases} \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x+1} = 0 \ \ \left(\text{car } \lim\limits_{X \to +\infty} \dfrac{\ln X}{X} = 0\right) \\[2ex] \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x+1}{x} = 1 \ \ \text{(la limite d'une fonction rationnelle en } +\infty \text{ est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré)} \end{cases}$$

D'où, par produit : $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x+1)}{x} = 0$

Exercice 3 *Détermination de l'expression d'une fonction* **(3 points)**

La condition "C passe par $A(0\ ;\ 1)$" se traduit par :

$$f(0) = 1$$

C'est-à-dire : $c = 1$

Pour exploiter les deux autres conditions, calculons la dérivée f' de f :

La fonction f est du type : $f = uv$ avec $\begin{cases} u(x) = ax^2 + bx + c \\ v(x) = \mathbf{e}^{-x} \end{cases}$

On a donc : $f' = u'v + uv'$

Ce qui donne : $f'(x) = (2ax + b)\ \mathbf{e}^{-x} + (a\,x^2 + bx + c) \times (-\,\mathbf{e}^{-x})$

Factorisons par $\mathbf{e}^{-x}$, puis réduisons :

$$f'(x) = (-a\,x^2 + (2a - b)x + (b - c))\,\mathbf{e}^{-x}$$

La condition "C admet une tangente parallèle à (Ox) au point d'abscisse 1" se traduit par : $f'(1) = 0$

D'où : $(-a + (2a - b) + (b - c))\ \mathbf{e}^{-1} = 0$

C'est-à-dire : $(a - c)\ \mathbf{e}^{-1} = 0$

Or, $\mathbf{e}^{-1} \neq 0$ donc : $a = c = 1$

Et enfin la condition $f'(0) = -6$ donne : $b - c = -6$ d'où $b = c - 6 = -5$

Conclusion : $f(x) = (\,x^2 - 5x + 1)\ \mathbf{e}^{-x}$

$$(a = 1\ ;\ b = -5 \text{ et } c = 1)$$

Exercice 4 *Une fonction de Gompertz* **(4 points)**

1. $f(0) = \mathbf{e}^{-2} = \dfrac{1}{\mathbf{e}^2}$.

2. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-3x} = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} -2\,\mathbf{e}^{-3x} = -\infty$. D'où : $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathbf{e}^{-2\mathbf{e}^{-3x}} = 0$

   $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-3x} = 0$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} -2\,\mathbf{e}^{-3x} = 0$. D'où : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathbf{e}^{-2\mathbf{e}^{-3x}} = 1$

3. f est de la forme $f = \mathbf{e}^{u}$ avec $u(x) = -2\,\mathbf{e}^{-3x}$.

   On a donc $f' = u'\,\mathbf{e}^{u}$, ce qui donne :

   $$f'(x) = -2 \times (-3)\ \mathbf{e}^{-3x}\ \mathbf{e}^{-2\mathbf{e}^{-3x}} = 6\ \mathbf{e}^{-3x-2\mathbf{e}^{-3x}}$$

   La fonction f est donc croissante sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$	$+\infty$
Signe de $f'(x)$	+	
Variations de f	0 ↗	1

4. Une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse $\dfrac{1}{3}\ln 2$ est donnée par :

$$T : y = f\left(\frac{\ln 2}{3}\right) + f'\left(\frac{\ln 2}{3}\right)\left(x - \frac{\ln 2}{3}\right)$$

$$T : y = \mathbf{e}^{-1} + 6 \times \frac{1}{2} \times \mathbf{e}^{-1} \times \left(x - \frac{\ln 2}{3}\right)$$

$$T : y = \mathbf{e}^{-1}(1 + 3x - \ln 2)$$

$$T : y = \frac{3x + 1 - \ln 2}{\mathbf{e}}$$

Exercice 5 *Injection d'une substance médicamenteuse* **(4 points)**

1. On rappelle que les fonctions solutions de l'équation différentielle $y' = ky$ sont de la forme $y(t) = A\,\mathbf{e}^{kt}$ où A est une constante (qui est en fait égale à $y(0)$). Nous avons donc ici :

$$Q(t) = Q(0)\,\mathbf{e}^{-at}$$

2. On suppose que $Q(0) = 50$ mg . L^{-1}.

   On a donc $Q(1) = 25$, d'où :
$$25 = 50\,\mathbf{e}^{-a}$$
$$\mathbf{e}^{a} = 2$$
$$a = \ln 2$$

   Finalement, on a explicité la fonction Q :

$$Q(t) = 50\,\mathbf{e}^{-t\ln 2}$$

3. a. Comme $\ln 2 > 0$, on a : $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} -t\ln 2 = -\infty$

   D'où $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \mathbf{e}^{-t\ln 2} = 0$ (car $\displaystyle\lim_{X\to-\infty} \mathbf{e}^{X} = 0$)

   On sait que : $Q'(t) = -aQ(t) = -50\ln 2\,\mathbf{e}^{-t\ln 2} < 0$

   Donc Q est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$.

   b. Voir ci-dessous.

   c. (i) R_n est la quantité de substance médicamenteuse présente dans le sang du malade après n heures.

   Après s'être écoulé une heure supplémentaire, il reste dans le sang :

$$R_n\,\mathbf{e}^{-\ln 2} = \frac{1}{2}R_n$$

   Comme on réinjecte 50 mg . L^{-1} de produit, on a bien :

$$R_{n+1} = \frac{1}{2}R_n + 50$$

   (ii) Recherchons α tel que :
$$\alpha = \frac{1}{2}\alpha + 50$$
$$\alpha = 100$$

   Posons :
$$v_n = R_n - \alpha$$

   On a donc :
$$\begin{cases} R_{n+1} = \dfrac{1}{2}R_n + 50 \\[2ex] \alpha = \dfrac{1}{2}\alpha + 50 \end{cases}$$

En soustrayant membre à membre, il vient :

$$v_{n+1} = \frac{1}{2} v_n$$

La suite (v_n) est donc géométrique de raison $q = \frac{1}{2}$. Comme $v_0 = R_0 - 100 = -50$, on a :

$$v_n = -50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

D'où : $$R_n = v_n + \alpha = 100 - 50 \times \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(iii) Comme (v_n) est géométrique de raison $q = \frac{1}{2} \in \,]-1\,;\,1[$, elle converge vers 0.

On en déduit que la suite (R_n) converge vers 100

À long terme, ce système de réinjection permet de stabiliser la quantité de substance médicamenteuse à 100mg . L^{-1} dans le sang du malade.