➊ Soit la fonction numérique de la variable réelle x définie sur l'intervalle [0,125 ; 5] par :

$$f(x) = \frac{x}{2} - \ln x$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) dont les unités graphiques sont :

3 cm sur l'axe des abscisses,
5 cm sur l'axe des ordonnées.

a) Reproduire le tableau et le compléter. Donner les valeurs approchées des résultats, arrondies au centième.

x	0,125	0,25	0,5	0,75	1	1,5	2	2,5	3	3,5	4	4,5	5
$f(x)$	**2,14**	**1,51**	0,94	**0,66**	**0,5**	0,34	**0,31**	**0,33**	0,4	**0,5**	0,61	0,75	0,89

b) Placer certains points (au moins 6) dans le repère (O, $\vec{i}$, $\vec{j}$) sur l'annexe 1.

c) ➥ Déterminer la dérivée f' de la fonction f .

$f'(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{x} = \frac{x-2}{2x}$

➥ Donner la valeur x_0 qui annule la dérivée et en déduire une particularité de la courbe C en son point d'abscisse x_0 .

$f'(x_0) = 0$ pour $\frac{1}{2} - \frac{1}{x_0} = 0 \Rightarrow \frac{1}{x_0} = \frac{1}{2} \Rightarrow x_0 = 2$, la fonction $f(x)$ admet un extremum en ce point, la tangente est parallèle à l'axe des abscisses

➥ Calculer $f'(1)$. En déduire la construction de la tangente à la courbe C en son point B d'abscisse + 1. On laissera les traits de construction apparents sur le graphique.

$f'(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$, le coefficient directeur de la tangente en ce point est donc égal à $-\frac{1}{2}$

➥ Tracer la courbe C en exploitant tous les résultats précédents.

d) ➥ Ecrire l'équation de la droite D passant par les points B (0 ; –1) et E (1 ; $-\frac{1}{2}$).

Coefficient directeur de D : $a = \frac{y_E - y_B}{x_E - x_B} = \frac{-\frac{1}{2} - (-1)}{1 - 0} = \frac{1}{2}$

L'ordonnée à l'origine est : (–1)

L'équation de D est : $\boldsymbol{y = \frac{1}{2}x - 1}$

➥ Tracer la droite D .

➥ Soit M le point d'intersection de la courbe et de la droite d'équation :

$$y = \frac{x}{2} - 1 .$$

On désire effectuer une lecture graphique des coordonnées du point M. On désigne par P la projection orthogonale de M sur l'axe des abscisses et par Q la projection orthogonale de M sur l'axe des ordonnées.

➢ Lire les longueurs OP et OQ en mm ; on admet que la lecture se fait au mm près.

Sur une représentation à l'échelle, on lit OP ≈ 82 mm OQ = 18 mm

➢ En déduire les valeurs approchées arrondies au centième des coordonnées du point M.

$$M : \begin{cases} \text{abscisse } x = \dfrac{OP}{30} = 2{,}73 \\ \text{ordonnée } y = \dfrac{OQ}{50} = 0{,}36 \end{cases}$$

➥ Vérifier ces résultats par le calcul.

La courbe C coupe la droite D lorsque : $\frac{x}{2} - \ln x = \frac{x}{2} - 1 \Rightarrow \ln x = 1 \Rightarrow \boldsymbol{x = e \approx 2{,}72} \Rightarrow y = \frac{e}{2} - \ln e$

$y \approx 0{,}36$

(d'après Bac Pro maintenance automobile de 1994)

❷ Soit la fonction f définie sur l'intervalle I = [0,1 ; 5,5] par :

$$f(x) = x^2 + 1 - 8 \ln x$$

On note C sa courbe représentative dans un repère orthogonal $(O, \vec{i}, \vec{j})$ dont les unités graphiques sont :

2 cm en abscisses,
1cm en ordonnées.

a) Calculer $f(0{,}1)$ et $f(5{,}5)$ à 10^{-1} près.

$f(0{,}1) = 0{,}1^2 + 1 - 8 \ln 0{,}1 = 19{,}4$

$f(5{,}5) = 5{,}5^2 + 1 - 8 \ln 5{,}5 = 17{,}6$

b) Déterminer la dérivée $f\,'$ de la fonction f. Étudier sur l'intervalle I, le signe de la dérivée et en déduire le sens de variation de la fonction f.

$f\,'(x) = 2x - \frac{8}{x}$

$f\,'(x) = 0$ pour $2x - \frac{8}{x} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{8}{x} \Rightarrow 2x^2 = 8 \Rightarrow x^2 = 4 \Rightarrow x = +2$ ou -2

Un polynôme du second degré est du signe de "a" à l'extérieur des racines et du signe de "–a" entre les racines ⇒ $2x^2 - 8 = 0$ est positif de]2 ; 5,5] et négatif de [0,1 ; 2[

x	0,1		2		5,5
$f\,'(x)$		–	0	+	
f	19,4	↘	–0,55	↗	17,6

c) Tracer la courbe C.

(d'après Bac Pro Productique mécanique de 1992)

❸ Soit la fonction numérique f qui, à tout réel x réel strictement positif, fait correspondre $f(x) = x^2 - 2 \ln x$ où $\ln x$ représente le logarithme népérien de x .

➥ Expliquer pourquoi cette fonction est définie pour $x > 0$. Déterminer la dérivée f' de f.

La fonction logarithme népérien n'est définie que sur $\mathbb{R}^{+*}$ donc $f(x)$ n'est définie que pour $x > 0$

$$f'(x) = 2x - \frac{2}{x}$$

➥ Etudier le signe de cette dérivée $f'(x)$ selon le choix de x.

$f'(x) = 0$ pour $2x - \frac{2}{x} = 0 \Rightarrow 2x = \frac{2}{x} \Rightarrow 2x^2 = 2 \Rightarrow x^2 = \frac{2}{2} \Rightarrow x^2 = 1 \Rightarrow x = 1$ ou $x = -1$

Un polynôme du second degré est du signe de "a" à l'extérieur des racines et du signe de "–a" entre les racines $\Rightarrow 2x^2 - 2 = 0$ est positif de]1 ; +∞] et négatif de [0 ; 1[

➥ Etudier les variations de f sur l'intervalle [0,1 ; 3].

x	0,1		1		3
$f'(x)$		–	0	+	
f	4,62	↘	1	↗	6,8

➥ Soit C la courbe représentative de f, sur l'intervalle [0,1 ; 3], dans un repère orthonormé, d'axes $x'ox$ et $y'oy$, l'unité étant représentée par 2 cm.

➢ Calculer à 0,1 près $f\left(\frac{1}{2}\right)$, $f(2)$, $f(3)$.

$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 2\ln\left(\frac{1}{2}\right) = 0{,}25 - 2 \times (-0{,}693) = 0{,}25 + 1{,}386 = \mathbf{1{,}6}$

$f(2) = 2^2 - 2 \times \ln(2) = 4 - 2 \times 0{,}693 = 4 - 1{,}386 = \mathbf{2{,}6}$

$f(3) = 3^2 - 2 \times \ln(3) = 9 - 2 \times 1{,}097 = 9 - 2{,}197 = \mathbf{6{,}8}$

➢ Donner une équation de la tangente T à la courbe C au point d'abscisse $\frac{1}{2}$.

Equation de la tangente en un point d'une courbe : $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$

Equation de la tangente en $x_0 = \frac{1}{2}$: $y = f'(\frac{1}{2}) + (x - \frac{1}{2}) + f(\frac{1}{2})$

$f'(\frac{1}{2}) = 2 \times \frac{1}{2} - \frac{2}{\frac{1}{2}} = 1 - 4 = -3$

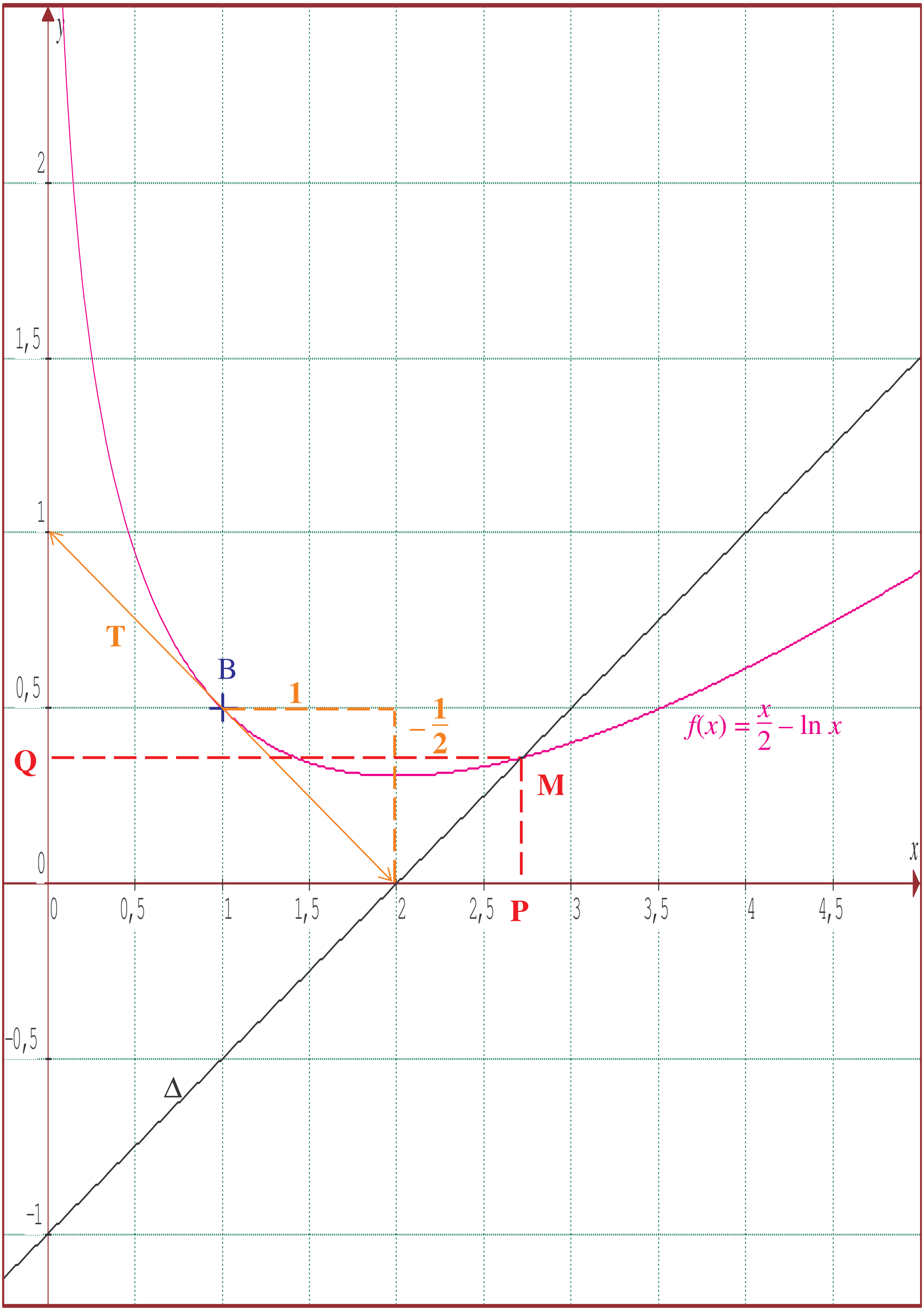
$y = (-3)(x - \frac{1}{2}) + 1{,}6 \Rightarrow y = -3x + \frac{3}{2} + 1{,}6 \Rightarrow \mathbf{y = -3x + 3{,}1}$

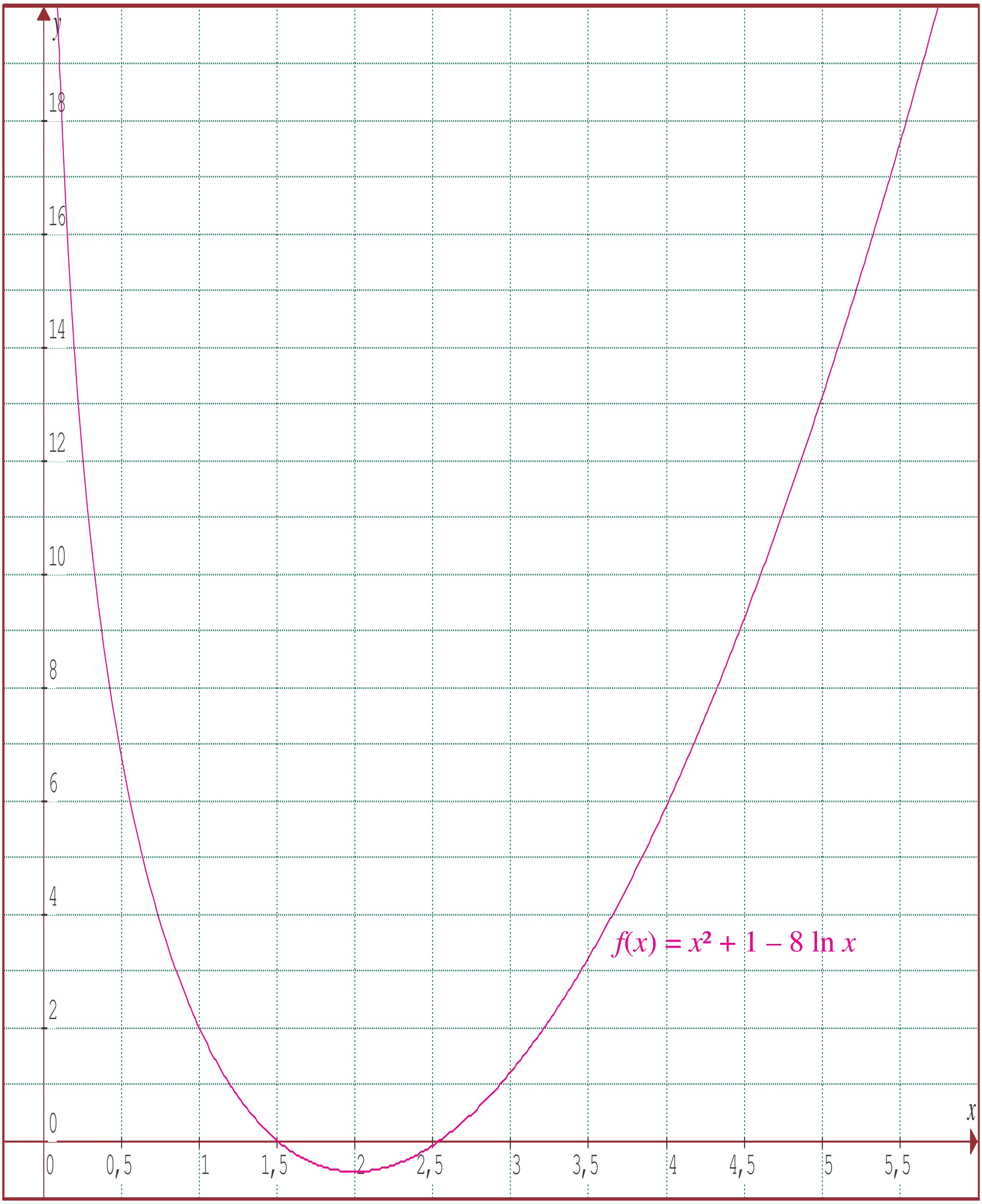
➢ Tracer C et T.

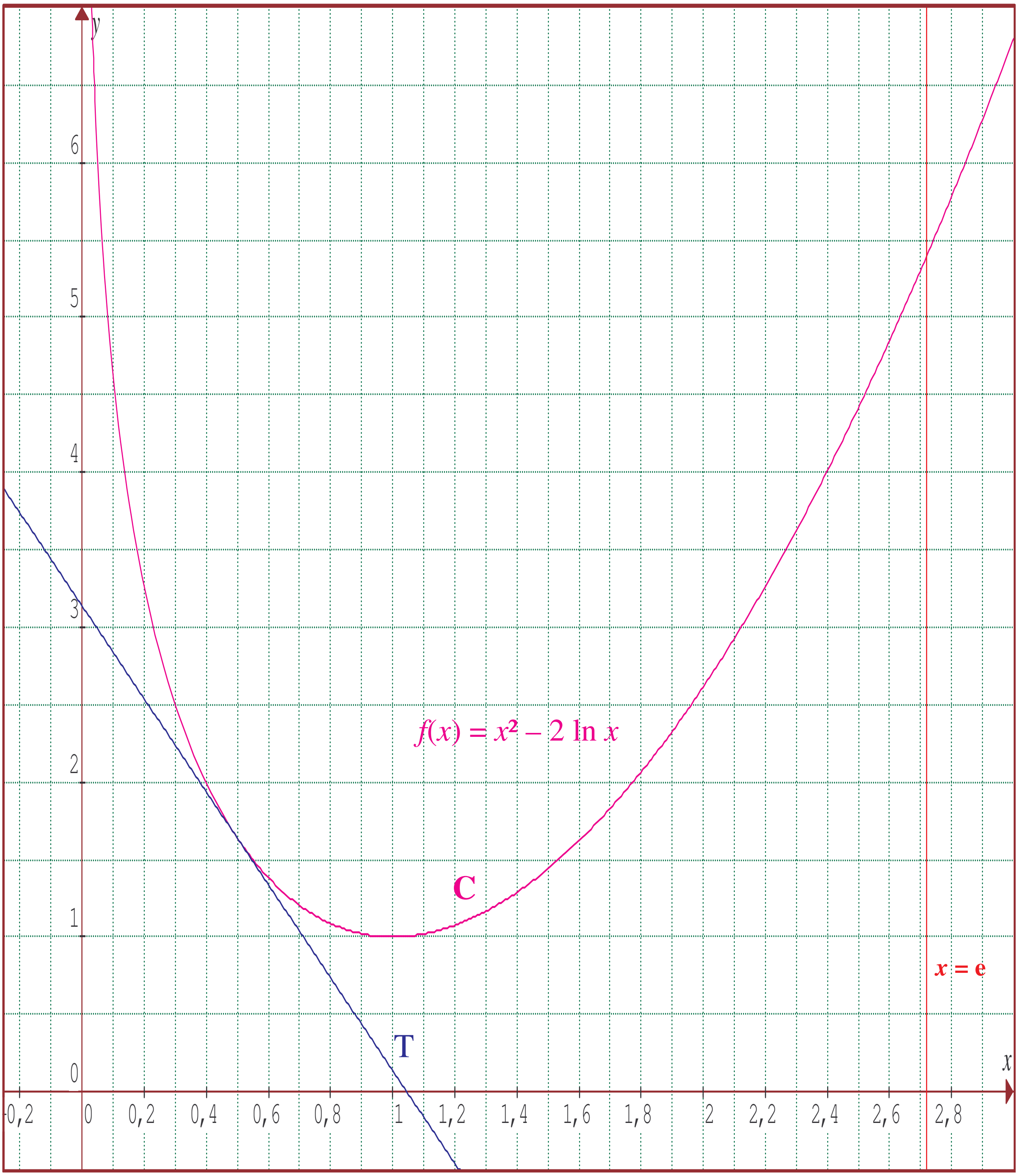
➢ Déterminer l'intersection de la courbe C et de la droite D d'équation $x = e$ dans le repère choisi (on rappelle $\ln e = 1$).

C coupe D lorsque $y = e^2 - 2 \ln e = e^2 - 2 \approx 5{,}39$ **(2,72 ; 5,39)**

(d'après Bac Pro maintenance de l'audiovisuel électronique de 1988)


y
2
1,5
1
0,5
0
-0,5
-1
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
x
T
B
1
$-\frac{1}{2}$
Q
M
P
$f(x) = \frac{x}{2} - \ln x$
Δ


y
18
16
14
12
10
8
6
4
2
0
0
0,5
1
1,5
2
2,5
3
3,5
4
4,5
5
5,5
x
f(x) = x² + 1 – 8 ln x


y
6
5
4
3
2
1
0
$f(x) = x^2 - 2 \ln x$
C
T
$x = e$
x
-0,2
0
0,2
0,4
0,6
0,8
1
1,2
1,4
1,6
1,8
2
2,2
2,4
2,6
2,8