NOM :	Prénom :		
DM n°4 – Irrationnalité de $\sqrt{2}$	Classe :	Note :	/10

L'irrationnalité de $\sqrt{2}$ semble avoir été découverte par les pythagoriciens.
Dans cette démonstration, on va **<u>raisonner par l'absurde</u>** : partir de l'hypothèse que $\sqrt{2}$ est rationnel, donc qu'on peut l'écrire sous la forme d'une fraction irréductible $\frac{p}{q}$, puis constater que cette hypothèse nous conduit à une contradiction, nous amenant à conclure que cette hypothèse est fausse.

1e Méthode

Supposons donc que p et q existent, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$. On admettra que $\sqrt{2}^2 = 2$. On admettra également que si le carré d'un nombre est pair, alors ce nombre l'est aussi.

1) Montrer qu'on a $p^2 = 2q^2$.
2) Le nombre $2q^2$ est-il pair ou impair ? En déduire que p est pair.
3) On pose $p = 2p'$. Expliquer pourquoi $q^2 = 2p'^2$. En déduire que q est pair.
4) Expliquer d'après le 2) et le 3) pourquoi la fraction $\frac{p}{q}$ n'est pas irréductible.

2e Méthode

Supposons donc que p et q existent, tels que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$.

1) Compléter le tableau, en s'aidant de l'exemple :

Si $p = 17$, alors son chiffre des unités est 7, et le chiffre des unités de p^2 est 9 (car 7 × 7 = 4**<u>9</u>**)

Chiffre des unités de p ou de q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Chiffre des unités de p^2										
Chiffre des unités de q^2										
Chiffre des unités de $2q^2$										

2) Comment choisir, d'après le tableau, les chiffres des unités de p et q pour que $p^2 = 2q^2$?
3) Dans ce cas, quel est le diviseur commun différent de 1 des nombres p et q ?
4) La fraction $\frac{p}{q}$ est-elle irréductible ?