Résoudre une équation bicarrée

1) ***Un exemple :*** On note (E) l'équation $2x^4+11x^2-6=0$

a) (E) $\Leftrightarrow 2x^4+11x^2-6=0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2+11x^2-6=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 & (1) \\ 2X^2+11X-6=0 & (2) \end{cases}$

b) *Résolution de l'équation du second degré (2) d'inconnue X* : $\Delta=11^2-4\times2\times(-6)=169=13^2$.

$\Delta>0$ donc l'équation (2) possède deux solutions notées X_1 et X_2 données par

$X_1=\dfrac{-11-\sqrt{169}}{2\times2}=-6$ et $X_2=\dfrac{-11+\sqrt{169}}{2\times2}=\dfrac{1}{2}$ donc (2) équivaut à $X=-6$ ou $X=\dfrac{1}{2}$

alors (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=-6 \text{ ou } X=\dfrac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x^2=-6$ ou $x^2=\dfrac{1}{2}$; Or l'équation $x^2=-6$ n'a pas de solution

d'où (E) $\Leftrightarrow x^2=\dfrac{1}{2} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{1}{2}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{1}{2}}$.

D'autre part $\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$, d'où l'ensemble des solutions de l'équation (E) : $\boxed{S=\left\{-\dfrac{\sqrt{2}}{2};\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right\}}$

2) ***Applications :*** ***Résolution de trois autres équations bicarrées***

On note (E) l'équation $2x^4-5x^2+1=0$

a) (E) $\Leftrightarrow 2x^4-5x^2+1=0 \Leftrightarrow 2(x^2)^2-5x^2+1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 & (1) \\ 2X^2-5X+1=0 & (2) \end{cases}$

Résolution de (2) : $\Delta=17$ donc cette équation a deux solutions $X_1=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ et $X_2=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

alors (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4} \text{ ou } X=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$ ou $x^2=\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

Or $\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}>0$ et $\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}>0$ (car 25 > 17 $\Rightarrow \sqrt{25}>\sqrt{17} \Rightarrow 5>\sqrt{17} \Rightarrow 5-\sqrt{17}>0$)

d'où (E) $\Leftrightarrow x=\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2}$ ou $x=\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}$ ou $x=-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}$

d'où l'ensemble des solutions de (E) : $\boxed{S=\{-\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2};\dfrac{\sqrt{5-\sqrt{17}}}{2};-\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2};\dfrac{\sqrt{5+\sqrt{17}}}{2}\}}$

b) On note (E) l'équation $4x^4+37x^2+9=0$

(E) $\Leftrightarrow 4x^4+37x^2+9=0 \Leftrightarrow 4(x^2)^2+37x^2+9=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 & (1) \\ X^2+37X+9=0 & (2) \end{cases}$

<u>*Résolution de (2)*</u> : $\Delta=1225=35^2$ donc cette équation a deux solutions $X_1=-9$ et $X_2=-\dfrac{1}{4}$

alors (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=-9 \text{ ou } X=-\dfrac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x^2=-9$ ou $x^2=-\dfrac{1}{4}$.

Comme $-9<0$ et $-\dfrac{1}{4}<0$ aucune des deux dernières équations n'a de solution dans $\mathbb{R}$; il en résulte que l'équation (E) n'a aucune solution dans $\mathbb{R}$ et donc que l'ensemble des solutions de (E) est l'ensemble vide :

$$\boxed{S=\varnothing}$$

c) On note (E) l'équation $-\dfrac{9}{4}x^4+3x^2-1=0$

(E) $\Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}x^4+3x^2-1=0 \Leftrightarrow -\dfrac{9}{4}(x^2)^2+3x^2-1=0 \Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 & (1) \\ -\dfrac{9}{4}X^2+3X-1=0 & (2) \end{cases}$

<u>*Résolution de (2)*</u> : $\Delta=0$ donc cette équation a une seule solution $X_0=\dfrac{2}{3}$

alors (E) $\Leftrightarrow \begin{cases} X=x^2 \\ X=\dfrac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow x^2=\dfrac{2}{3} \Leftrightarrow x=\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ ou $x=-\sqrt{\dfrac{2}{3}}$.

Or $\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}}{3}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ d'où l'ensemble des solutions de (E) : $\boxed{S=\left\{-\dfrac{\sqrt{6}}{3};\dfrac{\sqrt{6}}{3}\right\}}$