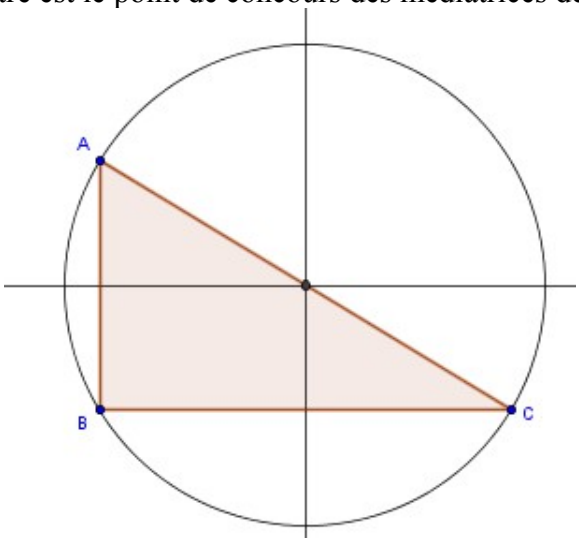
Chapitre 2 – Triangle rectangle
- Cours -

Définition : Dans un triangle **rectangle**, le côté opposé à l'angle droit est appelé **l'hypoténuse**. C'est le côté le plus long.

I. Cercle circonscrit à un triangle rectangle

Rappel : Le cercle **circonscrit** à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle. Son centre est le point de concours des médiatrices des côtés.



Propriété 1 : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour **diamètre l'hypoténuse du triangle**.

Propriété 3 : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour **centre le milieu de l'hypoténuse du triangle**.

Exemples : On considère le triange ABC rectangle en C et
L, M, N les milieux respectifs de [AB], [AC] et [BC].
Montre que L est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

<u>*Données*</u> : Le triangle ABC est rectangle en C et L est le milieu de l'hypoténuse [AB].
<u>*Propriété*</u> : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour centre le milieu de l'hypoténuse du triangle.
<u>*Conclusion*</u> : L est bien le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

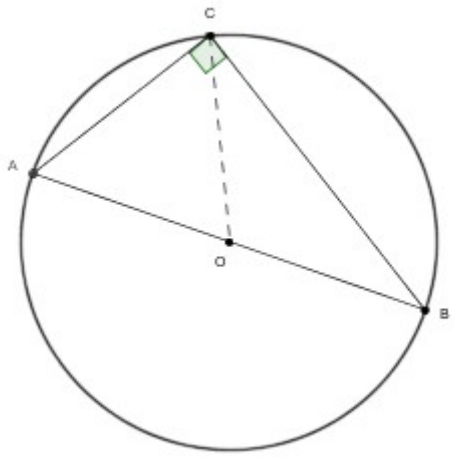
On a également les deux propriétés **réciproques** :

Propriété 2 : Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour diamètre le plus grand côté du triangle alors le triangle est rectangle.

Propriété 4 : Si u triangle est inscrit dans un cercle ayant pour centre le milieu du plus grand côté de ce triangle alors le triangle est rectangle.

Exemples : On considère un cercle de centre O, milieu de [AB] et C appartenant au cercle
A et B sont également sur le cercle.
Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie.

<u>*Données*</u> : A, B et C sont sur le cercle donc ABC est inscrit dans un cercle ayant pour centre le milieu de [AB].
<u>*Propriété*</u> : Si un triangle est inscrit dans un cercle ayant pour centre le milieu du plus grand côté de ce triangle alors le triangle est rectangle.
<u>*Conclusion*</u> : ABC est rectangle en C.



A, B et C sont sur le cercle de centre O donc OA = OB = OC (ce sont des rayons)
Donc si le triangle est rectangle, il est inscrit dans le cercle ayant pour diamètre l'hypoténuse.
On a alors **AB = 2 × OC**

On a donc une nouvelle propriété et sa réciproque :

Propriété 5 : Si un triangle est rectangle alors **la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse**.

Propriété 6 : Si la médiane **relative** à un des côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de celle de ce côté alors ce triangle est rectangle.

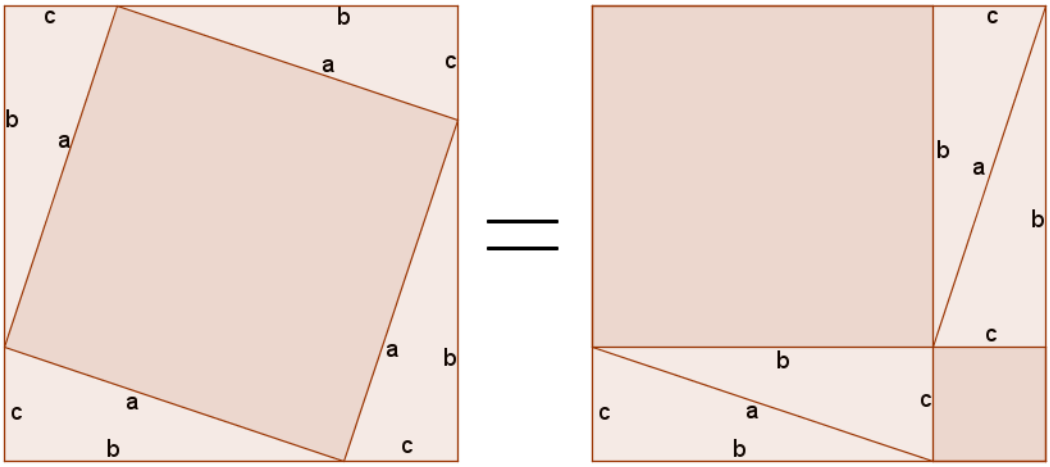
Exemples : On considère le triange ABC avec I milieu de [AB] tel que
AB = 5 cm et CI = 2,5 cm. Quelle est la nature du triangle ABC ? Justifie.

<u>*Données*</u> : I est le milieu de [AB] donc la médiane relative à [AB] est [CI] et on a

$$\frac{AB}{2} = \frac{5}{2} = 2{,}5 = \text{CI}.$$

<u>*Propriété*</u> : Si la médiane relative à un des côtés d'un triangle a pour longueur la moitié de celle de ce côté alors ce triangle est rectangle.
<u>*Conclusion*</u> : ABC est rectangle en C.

II. Théorème de Pythagore



Les aires des carrés à l'intérieur des deux figures sont égales, on peut écrire $a^2 = b^2 + c^2$
Cette formule est tout simplement la formule du **théorème de Pythagore**.

1. Le théorème de Pythagore

Théorème de Pythagore : Si un triangle est rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la **somme des carrés des deux autres côtés**.

Exemple : Si ABC est un triangle rectangle en A, le théorème de Pythagore nous donne donc la formule : $\mathbf{BC^2 = AC^2 + AB^2}$

Utilité du théorème : Si on connait deux côtés d'un triangle rectangle, on va pouvoir calculer le troisième côté.

Exemples : **1)** ***On ne connait pas l'hypoténuse***

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que AB = 3 cm et BC = 4 cm. Calcule AC.

Le triangle ABC est rectangle en B
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$AC^2 = 4^2 + 3^2$
$(AC^2 = 4 \times 4 + 3 \times 3)$
$AC^2 = 16 + 9$
$AC^2 = 25$ Donc AC = $\sqrt{25}$ = 5 cm.

2) ***On ne connait pas l'un des côtés de l'angle droit***

On considère le triangle ABC rectangle en B tel que AC = 10 cm et BC = 8 cm. Calcule AB.

Le triangle ABC est rectangle en B
D'après le théorème de Pythagore, on a :

$AC^2 = BC^2 + AB^2$
$10^2 = 8^2 + AB^2$
$AB^2 = 10^2 - 8^2$
$AB^2 = 100 - 64$
$AB^2 = 36$ Donc AB = $\sqrt{36}$ = 6 cm.

2. La réciproque du théorème de Pythagore

Réciproque du théorème de Pythagore :	Si le **carré** du plus grand côté d'un triangle est égal à la **somme des carrés** des deux autres côtés alors le triangle est rectangle.

Si on connait les trois côtés d'un triangle, on peut vérifier que le triangle est rectangle.

Exemple : Montre que le triangle DEF tel que DE = 9,6 cm, EF = 12 cm et DF = 7,2 cm est rectangle.

Dans le triangle DEF, le plus grand côté est [EF]
On calcule : $EF^2 = 12^2 = 144$
$DE^2 + DF^2 = 9{,}6^2 + 7{,}2^2 = 92{,}16 + 51{,}84 = 144$
On a donc $EF^2 = DE^2 + DF^2$
D'après la réciproque du théorème de Pythagore, DEF est rectangle en D

3. La contraposée du théorème de Pythagore

Contraposée du théorème de Pythagore :	Si le carré du plus grand côté d'un triangle **n'est pas** égal à la somme des carrés des deux autres côtés alors le triangle **n'est pas** rectangle.

Si l'égalité du théorème de Pythagore **n'est pas vraie**, le triangle **n'est pas** rectangle.

Exemple : Montre que le triangle DEF tel que DE = 24 cm, EF = 12 cm et DF = 20 cm n'est pas rectangle.

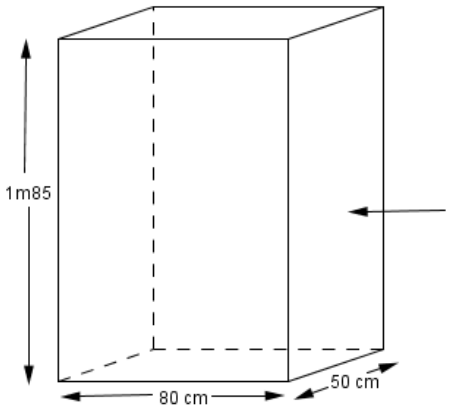
Dans le triangle DEF, le plus grand côté est [DE]
On calcule : $DE^2 = 24^2 = 576$
$EF^2 + DF^2 = 12^2 + 20^2 = 144 + 400 = 544$
On a donc $EF^2 \lozenge DE^2 + DF^2$
D'après la contraposée du théorème de Pythagore, DEF n'est pas rectangle

Chapitre 2 – Triangle rectangle

- Fiche 0 : Enigme d'introduction -

Un ébéniste a réalisé l'armoire suivante pour un de ses clients.

On peut assimiler cette armoire à un bloc de 1m85 de haut, 80 cm de large et 50 cm de profondeur.
On a donc le schéma suivant :



L'armoire est maintenant posée sur le côté (indiqué par la flèche) au centre de la pièce où elle doit être installée. L'ébéniste mesure la hauteur de la pièce et trouve 1m90.

L'ébéniste va-t-il pouvoir redresser l'armoire pour la mettre définitivement à sa place ?

Chapitre 2 – Triangle rectangle

- Fiche I : Cercle circonscrit (1) -

Rappel : Le **cercle circonscrit** à un triangle est le cercle passant par les trois sommets de ce triangle. Son centre est le point de concours des **médiatrices** des côtés.

Construction : Trace un cercle de rayon 4 cm. Place trois points sur le cercle et trace le triangle.

Déplace les points sur le cercle afin de faire en sorte que le triangle soit rectangle.
Essaie de trouver plusieurs positions possible pour les trois points.

Qu'observes-tu à chaque fois ?
……
……
Quel côté est concerné ? Comment peut-on le différencier des deux autres ?
……

On peut résumer ceci par deux propriétés :

Première Propriété : Si un triangle est …… alors son cercle circonscrit a pour diamètre ……

Seconde propriété : Si un triangle est …… alors son cercle circonscrit a pour centre ……

Construction : Place deux point A et B puis le milieu I de [AB].
Trace le cercle de centre I passant par A (cercle de diamètre [AB]).
Place un point C sur le cercle et trace le triangle ABC.

Que peut-on dire du triangle ABC ? ……
Que remarque-t-on à propos de IA, IB et IC ? ……
Complète l'égalité : IC = 2 × ……
Que représente le segment [IC] pour le triangle ABC ? C'est ……

Troisième propriété : Si un triangle est …… alors ……
……..

Chapitre 2 – Triangle rectangle

- Fiche I : Cercle circonscrit (2) -

Rappel : En inversant une propriété, on obtient la propriété **réciproque**.
Exemple : La propriété
"Un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur est un parallélogramme"
est la propriété réciproque de la propriété
"Un parallélogramme est un quadrilatère qui a ses côtés opposés deux à deux de même longueur"

Exercice : Trouve la propriété réciproque de chacune des propriétés suivante.

Propriété 1 : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour **diamètre l'hypoténuse du triangle**.

Propriété 2 : ……
……...
……...

Propriété 3 : Si un triangle est rectangle alors son cercle circonscrit a pour **centre le milieu de l'hypoténuse du triangle**.

Propriété 4 : ……
……...
……...

Propriété 5 : Si un triangle est rectangle alors **la médiane issue de l'angle droit a pour longueur la moitié de celle de l'hypoténuse**.

Propriété 6 : ……
……..
……...

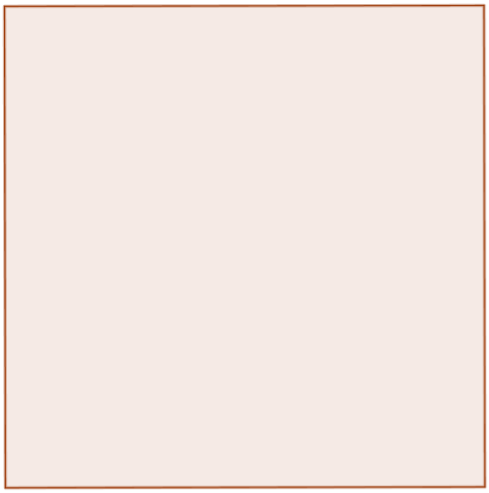
Aide : Dans les propriétés réciproques, sait-on si le triangle est rectangle au départ ?
Peut-on parler d'hypoténuse ?

Chapitre 2 – Triangle rectangle

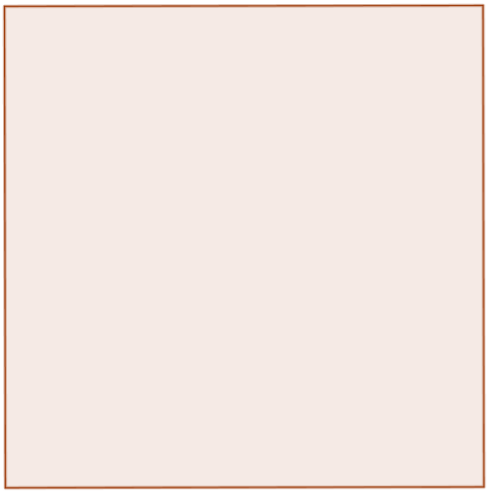
- Fiche II : Théorème de Pythagore (découverte) -

En plaçant quatre triangles (sans les superposer) à l'intérieur des carrés suivants, essaie de faire en sorte que l'espace **non recouvert** représente :

un **seul** carré



deux carrés distincts (de tailles différentes)



En utilisant les lettres a, b et c, donne l'aire de chaque partie non recouverte :

l'aire du carré est égale à

……

l'aire totale des deux carrés est égale à

……

Que peut-on dire de ces deux aires et donc des deux formules précédentes ? Elles sont ……
On peut donc écrire

…… = ……

En utilisant cette formule, résous les problèmes suivants :

Problème 1 : On sait que b = 4 cm et c = 3 cm.
Trouve la valeur de **a**.

Problème 2 : On sait que a = 10 cm et b = 8 cm.
Trouve la valeur de **c**.

Théorème de Pythagore : ……
……

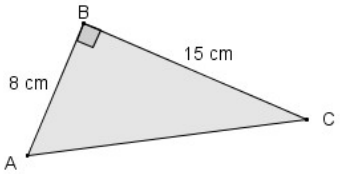
Exemple : Si ABC est un triangle rectangle en A, le théorème de Pythagore nous donne donc la formule : ……

a
b
c

Chapitre 2 – Triangle rectangle

- Fiche III : Théorème de Pythagore (rédaction) -

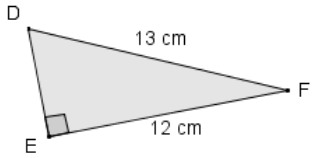
Exercice 1a : On considère le triangle suivant.



Calcule AC.

Le triangle …… est rectangle en ……
D'après le théorème de ……, on a :
……^{2} = AB^2 + ……^{2} → formule
……^{2} = 8^2 + ……^{2} → on remplace les valeurs
……^{2} = …… + …… → on calcule les carrés
……^{2} = …… → on additionne
Donc AC = $\sqrt{.....}$ = …… cm.

Exercice 1b : On considère le triangle suivant.



Calcule DE.

Le triangle …… est rectangle en ……
D'après le théorème de ……, on a :
……^{2} = ……^{2} + EF^2 → formule
……^{2} = ……^{2} + 12^2 → on remplace les valeurs
DE^2 = ……^{2} – ……^{2} → on change la fomule (plus grand moins plus petit)
……^{2} = …… – …… → on calcule les carrés
……^{2} = …… → on soustraie
Donc DE = $\sqrt{.....}$ = …… cm.

Exercice 2a : On considère le triangle GHI rectangle en G tel que GH = 12 cm et GI = 16 cm. Calcule HI.

……
……
……
……
……^{2} = ……^{2} + ……^{2}
……^{2} = ……^{2} + ……^{2}
……^{2} = …… + ……
……^{2} = ……
Donc …… = …… = …… cm.

Exercice 2b : On considère le triangle JKL rectangle en K tel que JK = 48 cm et JL = 52 cm. Calcule KL.

……
……
……
……
……^{2} = ……^{2} + ……^{2}
……^{2} = ……^{2} + ……^{2}
……^{2} = ……^{2} – ……^{2}
……^{2} = …… – ……
……^{2} = ……
Donc …… = …… = …… cm.

Exercice 3a : On considère le triangle MNO rectangle en O tel que NO = 12 cm et MO = 35 cm. Calcule MN.

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Exercice 3b : On considère le triangle PQR rectangle en P tel que QR = 23 cm et QP = 11 cm. Calcule PR (arrondir aux dixièmes).

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Chapitre 2 – Triangle rectangle

- Fiche IV : Réciproque & contraposée (rédaction) -

Les rédactions de la **réciproque** et de la **contraposée** du théorème de Pythagore sont conçues de la même façon :

1) on présente le triangle en donnant le **plus grand** côté (***entre crochets***)

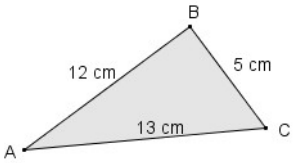
2) on calcule **séparément** les deux membres de la formule de Pythagore

3) on compare les résultats, s'il sont :

identiques → le triangle **est** rectangle (avec la réciproque)

différents → le triangle **n'est pas** rectangle (avec la contraposée)

Exercice 1 : On considère le triangle suivant.



Montre que ABC est un triangle rectangle.

Dans le triangle ……, le plus grand côté est ……

On calcule :

……^{2} = ……^{2}

= ……

……^{2} + ……^{2} = ……^{2} + ……^{2}

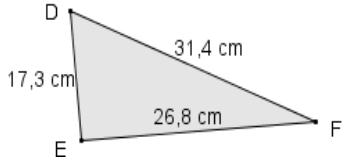
= …… + ……

= ……

On a donc ……^{2} …… ……^{2} + ……^{2}

D'après la …… du théorème de Pythagore, ……
……

Exercice 2 : On considère le triangle suivant.



Montre queDEF n'est pas un triangle rectangle.

Dans le triangle ……, le plus grand côté est ……

On calcule :

……^{2} = ……^{2}

= ……

……^{2} + ……^{2} = ……^{2} + ……^{2}

= …… + ……

= ……

On a donc ……^{2} …… ……^{2} + ……^{2}

D'après la …… du théorème de Pythagore, ……
……

Exercice 3 : On considère le triangle GHI tel que GH = 15,3 cm, HI = 10,7 cm et GI = 18,2 cm

Le triangle est-il rectangle ?

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Exercice 4 : On considère le triangle JKL tel que JK = 4,5 cm, KL = 2,7 cm et JL = 3,6 cm.

Le triangle est-il rectangle ?

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……