Correction des problèmes et exercices plus difficiles

A.

Soit α et β les deux nombres cherchés. Comme

$(x-\alpha)(x-\beta) = x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta$

$= x^2 - \dfrac{19}{3}x + 10 = P(x)$

et $P(\alpha) = P(\beta) = 0$, les nombres α et β

sont nécessairement les racines du polynôme $P(x)$:

$x^2 - \dfrac{19}{3} + 10 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 19x + 30 = 0$

Le discriminant vaut $(-19)^2 - 3 \times 30 \times 4 = 1$, donc les racines sont

$\alpha = \dfrac{19+1}{6} = \dfrac{10}{3}$ et $\beta = \dfrac{19-1}{6} = 3$

Réciproquement, on vérifie bien que $\dfrac{10}{3} \times 3 = 10$ et $\dfrac{10}{3} + 3 = \dfrac{19}{3}$.

B.

$$\frac{3x-2}{2x^2-5x-3} - \frac{2x+5}{3x^2-7x-6} = 0 \Leftrightarrow \frac{3x-2}{(x-3)(2x+1)} - \frac{2x+5}{(x-3)(3x+2)} = 0 \quad [\mathbf{1}]$$

On résout l'équation sur $\mathbb{R} - \left\{-\dfrac{2}{3}, -\dfrac{1}{2}, 3\right\}$.

$$\begin{aligned}
[\mathbf{1}] \Leftrightarrow \quad \frac{(3x-2)(3x+2)-(2x+5)(2x+1)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{9x^2-4-(4x^2+12x+5)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad \frac{(x-3)(5x+3)}{(x-3)(2x+1)(3x+2)} &= 0 \\
\Leftrightarrow \quad 5x+3 &= 0
\end{aligned}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{-\dfrac{5}{3}\right\}$

C. $(x^2-x)^2 = 14(x^2-x) - 24 \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ X^2 - 14X + 24 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ (X-12)(X-2) = 0 \end{cases}$

$\Leftrightarrow \begin{cases} X = x^2 - x \\ X = 12 \end{cases}$ ou $\begin{cases} X = x^2 - x \\ X = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \left(12 = x^2 - x \text{ ou } 2 = x^2 - x\right)$

$\Leftrightarrow \left(x^2 - x - 12 = 0 \text{ ou } x^2 - x - 2 = 0\right) \Leftrightarrow \left((x-4)(x+3) = 0 \text{ ou } (x+1)(x-2) = 0\right)$

D'où $\mathcal{S} = \{4, -3, -1, 2\}$.