Questionnaire Les réponses doivent être justifiées.

1. Tous les entiers peuvent s'écrire sous la forme d'une fraction.
   A) Vrai **B)** Faux
2. Il n'y a aucun nombre décimal entre $4,67$ et $4,68$.
   A) Vrai **B)** Faux
3. Poser la division euclidienne de 48308 par 7.
4. Un parallélogramme ne possède aucun axe de symétrie.
   A) Vrai **B)** Faux
5. La moitié de $\frac{1}{100}$ est $\frac{1}{50}$.
   A) Vrai **B)** Faux
6. Le produit de trois entiers consécutifs est multiple de 4.
   A) Vrai **B)** Faux
7. $0,5$ heure équivaut à 50 minutes.
   A) Vrai **B)** Faux
8. Calculer de tête $0,2 \times 0,3$.
9. La moitié du tiers d'un gâteau équivaut au cinquième de ce gâteau.
   A) Vrai **B)** Faux
10. Dans le nombre $343,245$ indiquer le nombre de dixièmes.
11. La somme des angles d'un pentagone vaut :
    A) 360° **B)** 180° **C)** 540° **D)** 270° **E)** Cela dépend
12. Avec 5 346 029 cailloux, combien de tas de 100 cailloux peut-on faire ?
    A) 53 460 **B)** 5 346 000 **C)** 53 460,29 **D)** 5 346
13. Si la diagonale d'un rectangle est tracée, cela permet de reconstruire le rectangle.
    A) Vrai **B)** Faux
14. Parmi ces propositions, laquelle est égale à π ?
    A) 3,14 **B)** $3 + \frac{1}{8}$ **C)** $\frac{22}{7}$ **D)** 3,1416 **E)** Aucune

Cours

Quelques notions importantes :
- Connaissance des différents nombres : entiers, décimaux, rationnels, réels ; et de leurs représentations.
- Approximation décimale.
- Ecriture décimale périodique.

Exercices

Exercice 1 D'après Amiens 1998 On considère les deux nombres $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.

1. Sont-ils des nombres décimaux ?
2. Comparer ces deux nombres.
3. Trouver un nombre décimal strictement compris entre ces deux nombres.
4. Trouver une fraction qui ne soit pas un nombre décimal, strictement comprise entre ces deux nombres.

Exercice 2 Dénombrement

1. Combien existe-t-il de nombres décimaux entre 13,25 et 13,26 ?
2. Combien existe-t-il de nombres décimaux compris entre 0 et 1 dont le produit par 1000 est un nombre entier multiple de 15 ?
3. Combien existe-t-il de fraction équivalente à $\frac{1\,071}{693}$ dont le numérateur est supérieur à 484 et le dénominateur inférieur à 112 ?

Extrait de *Réussir l'épreuve de Maths au concours CRPE* N. Auxire, O. Ledantec, F. Guerimand Editions Ellipses.

Exercice 3 La jauge de mon réservoir indique $\frac{1}{5}$. Je mets 33 litres d'essence dans le réservoir et la jauge indique ensuite $\frac{3}{4}$.
Quelle est, en litres, la capacité du réservoir ?

Exercice 4 **D'après Bordeaux 1998** Dans un scrutin uninominal à deux tours, le code électoral précise que seuls peuvent accéder au second tour les candidats qui ont obtenu un nombre de voix au moins égal à 12,5% du nombre des inscrits. Lors d'une élection, il y a 6 candidats pour 8 000 inscrits et, au premier tour 24% d'abstention et 85 bulletins blancs ou nuls.

1. Se peut-il qu'aucun candidat ne puisse accéder au second tour ?
2. Se peut-il que tous les candidats puissent accéder au second tour ?

Exercice 5 **2008 groupe 6**

1. Parmi les nombres rationnels suivants, quels sont ceux qui sont des décimaux ? Justifier la réponse.

$$\frac{1}{7} \quad ; \quad \frac{27}{8} \quad ; \quad \frac{91}{7} \quad ; \quad \frac{42}{17}$$

2. Le but de cette question est d'étudier l'écriture décimale de $\frac{1}{7}$.
   (a) Poser la division de 1 par 7. En déduire l'écriture décimale périodique de $\frac{1}{7}$.
   (b) Donner, en justifiant succinctement, la 32^e décimale de $\frac{1}{7}$.

3. Le but de cette question est de produire l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$. En utilisant un tableur pour effectuer la division de 42 par 17, on obtient le tableau suivant. A partir de la cellule A2, la colonne A contient les restes successifs de la division de 42 par 17. A partir de la cellule B2, la colonne B contient les quotients successifs de la division de 42 par 17.
   (a) Donner sans justification la 20^e décimale de l'écriture décimale de $\frac{42}{17}$.
   (b) A partir du tableau ci-contre, donner l'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$.
   (c) Expliquer pourquoi on est sûr de retrouver dans la cellule $A18$ un reste déjà obtenu.

	A	B
1	42	17
2	8	2
3	12	4
4	1	7
5	10	0
6	15	5
7	14	8
8	4	8
9	6	2
10	9	3
11	5	5
12	16	2
13	7	9
14	2	4
15	3	1
16	13	1
17	11	7
18	8	6
19	12	4
20	1	7
21	10	0
22	15	5
23	14	8
24		

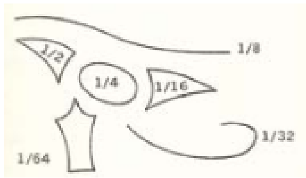
4. Quelle est l'écriture fractionnaire du rationnel $a = 1,\overline{23}$ (c'est-à-dire le nombre dont l'écriture décimale périodique est 1,232323232323232323...).
   Le calcul de $100a - a$ peut être utile !
5. Etude de la feuille de calcul utilisée en question 3. La cellule B2 a été remplie avec la formule : "=QUOTIENT(A1 ;B1)"
   (a) Quelle formule a été rentrée dans la cellule A2 ?
   (b) Quelles formules rentreriez-vous dans les cellules A3 et B3 afin que les formules des cellules situées en dessous puissent être générées automatiquement par le tableur (en utilisant la fonctionnalité "glisser-coller" à la souris).

Exercice 6 **2011 sujet zéro** Dans la numération égyptienne, le heqat, que l'on notera h, était l'unité de mesure de capacité des céréales. Les sous-unités étaient les suivantes :

$$\frac{1}{2}h \quad \frac{1}{4}h \quad \frac{1}{8}h \quad \frac{1}{16}h \quad \frac{1}{32}h \quad \frac{1}{64}h$$

Ces six fractions unaires (c'est-à-dire de numérateur égal à 1) utilisées comme mesures de capacité étaient représentées par les six parties différentes de l'œil d'Horus.

Extrait de *Réussir l'épreuve de Maths au concours CRPE* N. Auxire, O. Ledantec, F. Guerimand Editions Ellipses.



1. La somme des six fractions unaires est strictement inférieure à 1 (le « morceau » manquant de l'œil d'Horus était la quantité de céréales accordée aux scribes). Calculer le complément de cette somme à 1. Donner le résultat sous forme de fraction unaire.
2. Pour partager 3 heqats entre 4 personnes, on donne d'abord $\frac{1}{2}$ heqat à chaque personne, puis encore $\frac{1}{4}$ d'héqat. Prouver qu'il ne reste alors plus rien à partager.
3. Déterminer la valeur de la part (exprimée en heqat dans le système égyptien) et le reste lorsqu'il s'agit de partager équitablement 5 heqats entre 8 personnes. La réponse sera donnée sous la forme d'une somme de fractions unaires.
4. Le système égyptien combine donc 2 systèmes :
   – un système de base dix pour les nombres supérieurs à 1
   – un système de base 2 pour les nombres inférieurs à 1 (limité à la plus petite fraction unaire utilisée : $\frac{1}{64}$).

   (a) Déterminer la valeur de la part et le reste dans le cas d'un partage de 19 heqats entre 8 personnes. La réponse sera donnée sous la forme de la somme d'un entier et de fractions unaires.

   (b) Déterminer la mesure approchée à $\frac{1}{64}$ près par défaut de la part de chacun pour un partage de 17 heqats entre 7 personnes. Quelle est alors la quantité (exprimée en heqat) de céréales restante ?

Corrigés

Corrigé de l'exercice 1

1. $\frac{39}{75} = \frac{13}{25} = \frac{52}{100}$ est bien un nombre décimal.
   $\frac{29}{55} = \frac{29}{5\times 11}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$ avec a et b des entiers positifs. $\frac{29}{55}$ n'est pas un nombre décimal.
2. $\frac{29}{55} = \frac{29\times 15}{55\times 15} = \frac{435}{825}$
   $\frac{39}{75} = \frac{39\times 11}{75\times 11} = \frac{429}{825}$
   On déduit immédiatement que $\frac{39}{75}$ est inférieur à $\frac{29}{55}$.
3. $\frac{29}{55} = \frac{435}{825} = \frac{4\ 350}{8\ 250}$
   $\frac{39}{75} = \frac{429}{825} = \frac{4\ 290}{8\ 250}$
   $\frac{4323}{8250}$ est un nombre décimal (0,524) compris entre $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.
4. $\frac{436}{825}$ est un nombre compris entre $\frac{29}{55}$ et $\frac{39}{75}$.
   $\frac{436}{825} = \frac{2^2\times 109}{5^2\times 3\times 11}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$ avec a et b des entiers positifs. Ce n'est pas un nombre décimal.

Corrigé de l'exercice 2

1. Il existe toujours une infinité de nombres décimaux entre deux nombres décimaux distincts !
2. Ces nombres décimaux s'écrivent $\frac{N}{1000}$ où N est un entier puisque lorsqu'on les multiplie par 1000 on obtient un entier.
   Comme $\frac{N}{1000}$ est compris entre 0 et 1, cela implique que N est compris entre 0 et 1000.
   De plus, N est multiple de 15.
   $1000 = 15 \times 66 + 10$.
   On déduit donc qu'il y a exactement 67 nombres entiers qui sont des multiples de 15 inférieurs à 1000. Ce sont les nombres qui s'écrivent $15 \times k$ pour k un entier entre 0 et 66.
   Il existe donc 67 nombres décimaux vérifiant les conditions de l'énoncé.
3. $\frac{1071}{693} = \frac{9\times 7\times 17}{9\times 7\times 11} = \frac{17}{11}$.
   $\frac{17}{11}$ est une fraction irréductible donc toutes les fractions équivalentes à $\frac{17}{11}$ s'écrivent $\frac{17n}{11n}$ avec n un entier.
   Le numérateur doit être supérieur à 484 donc $17n$ est supérieur à 484 et finalement n est supérieur à $\frac{484}{17} = 28 + \frac{8}{17}$.
   Le dénominateur doit être inférieur à 112 donc $11n$ est inférieur à 112 et finalement n est inférieur à $\frac{112}{11} = 10 + \frac{2}{11}$.
   Il n'y a donc pas de solution au problème.

Corrigé de l'exercice 3

Notons x la capacité en litre du réservoir. On déduit de l'énoncé la relation :

$$\frac{1}{5}x + 33 = \frac{3}{4}x.$$

On résout cette équation :

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{5}x + 33 &= \tfrac{3}{4}x \\
33 &= \tfrac{3}{4}x - \tfrac{1}{5}x \\
\tfrac{15}{20}x - \tfrac{4}{20}x &= 33 \\
\tfrac{11}{20}x &= 33 \\
x &= \tfrac{20}{11} \times 33 \\
x &= 60
\end{aligned}$$

La capacité du réservoir est de 60 litres.

Corrigé de l'exercice 4

1. Pour qu'un candidat puisse atteindre le second tour, il lui faut 12,5% des 8000 inscrits. Soit 1000 votes en sa faveur. Se peut-il qu'aucun candidat ne puisse accéder au second tour ?
   Pour qu'aucun candidat ne puisse accéder au second tour, il faut que chacun d'entre eux obtienne au maximum 999 voix ! Il ne faut donc pas plus de 5994 suffrages exprimés non blancs.
   S'il y a 24% d'abstention le nombre de votant est de 6080. En enlevant les bulletins blancs, on obtient 5995 votes.
   Dans ces conditions, il n'est pas possible qu'aucun candidat ne soit présent au deuxième tour.

2. Pour que tous les candidats atteignent le deuxième tour, il faut que chacun d'entre eux obtienne au moins 1000 voix. Ce qui fait au total 6000 suffrages exprimés non blancs. Ce n'est donc pas possible que tous les candidats soient présents au second tour.

Corrigé de l'exercice 5

1. $\frac{1}{7}$ est une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$ avec a et b des entiers positifs. Ce n'est donc pas un nombre décimal.
   $\frac{27}{8} = 3{,}375$. C'est un nombre décimal !
   $\frac{91}{7} = 13$. C'est un nombre décimal !
   $42 = 17 \times 2 + 8$. $\frac{42}{17}$ est donc une fraction irréductible dont le dénominateur n'est pas de la forme $2^a \times 5^b$ avec a et b des entiers positifs. Ce n'est donc pas un nombre décimal.
2. (a)

$$\begin{array}{ccccccc|l}
1 & 0 & & & & & & 7 \\ \cline{8-8}
 & 3 & 0 & & & & & 0{,}142857 \\
 & & 2 & 0 & & & & \\
 & & & 6 & 0 & & & \\
 & & & & 4 & 0 & & \\
 & & & & & 5 & 0 & \\
 & & & & & & 1 &
\end{array}$$

   On déduit que le développement périodique de $\frac{1}{7}$ est $0{,}\overline{142857}$.

   (b) La période du développement périodique de $\frac{1}{7}$ est de 6 chiffres. Donc le même chiffre revient tous les 6 chiffres.
   $32 = 5 \times 6 + 2$.
   Le $32^{\text{ième}}$ chiffre est donc le même que le deuxième.
   La $32^{\text{ième}}$ décimale du développement décimal de $\frac{1}{7}$ est donc un 4.
3. (a) La $20^{\text{ième}}$ décimale est un 5.
   (b) L'écriture décimale périodique de $\frac{42}{17}$ est $2,\overline{4705882352941176}$.
   (c) Il suffit d'écrire la relation caractéristique de la division euclidienne d'un nombre A par 17 :

$$\left\{\begin{array}{rcl} A & = & 17q + r \\ r & < & 17 \end{array}\right.$$

   Puis que le reste d'une division par 17 est toujours strictement inférieur à 17, cela fait seulement 16 restes possibles : les nombres entiers de 1 à 16 (On ne peut pas avoir un reste nul puisque $\frac{42}{17}$ est un nombre irrationnel !). La période ne peut comporter au plus que 16 chiffres (puisque ensuite on retrouve un reste déjà trouvé). Donc le $17^{\text{ième}}$ reste (correspondant à la cellule $A18$) est un des restes déjà trouvés.
4. $100a = 100 \times 1{,}\overline{23} = 123,\overline{23} = 122 + 1{,}\overline{23} = 122 + a$. On en déduit que $100a = 122 + a$. D'où $a = \frac{122}{99}$.
5. Etude de la feuille de calcul utilisée en question 3. La cellule B2 a été remplie avec la formule : « =QUOTIENT(A1 ; B1) »
   (a) « =A1-B1*B2 » ou « =A1-17*B2 ».
   (b) – Dans la cellule B3 : « =QUOTIENT(A2*10 ; B$1) » ou
   « =QUOTIENT(A2*10 ; 17) ».
   – Dans la cellule A3 : « =A2*10-B3*B$1 » ou « =A2*10-B3*17 ».

Corrigé de l'exercice 6

1.

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} = \frac{32}{64} + \frac{16}{64} + \frac{8}{64} + \frac{4}{64} + \frac{2}{64} + \frac{1}{64} = \frac{63}{64}$$

   Le complément de cette la somme à 1 vaut $\frac{1}{64}$.
2.

$$\begin{aligned} 3 = 3 \times \tfrac{1}{2} + 3 \times \tfrac{1}{2} \\ &= 3 \times \tfrac{1}{2} + 6 \times \tfrac{1}{4} \\ &= 3 \times (\tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

   Il ne reste donc plus rien à la fin du partage.

Extrait de *Réussir l'épreuve de Maths au concours CRPE* N. Auxire, O. Ledantec, F. Guerimand Editions Ellipses.

3.

$$5 = 8 \times \tfrac{1}{2} + 2 \times \tfrac{1}{2}$$
$$\begin{aligned}
&= 8 \times \tfrac{1}{2} + 4 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 8 \times (\tfrac{1}{2} + 8 \times \tfrac{1}{8} \\
&= 8 \times (\tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{8})
\end{aligned}$$

Chaque personne recevra donc $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ d'heqat et il ne restera rien.

4. (a)

$$\begin{aligned}
19 &= 8 \times 2 + 3 \\
&= 8 \times 2 + 6 \times \tfrac{1}{2} \\
&= 8 \times 2 + 12 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 8 \times (2 + \tfrac{1}{4}) + 4 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 8 \times (2 + \tfrac{1}{4}) + 8 \times \tfrac{1}{8} \\
&= 8 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8})
\end{aligned}$$

Chaque personne recevra donc $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8}$ d'heqat et il ne restera rien.

(b)

$$\begin{aligned}
17 &= 7 \times 2 + 3 \\
&= 7 \times 2 + 6 \times \tfrac{1}{2} \\
&= 7 \times 2 + 12 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4}) + 5 \times \tfrac{1}{4} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4}) + 10 \times \tfrac{1}{8} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}) + 3 \times \tfrac{1}{8} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}) + 6 \times \tfrac{1}{16} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8}) + 12 \times \tfrac{1}{32} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32}) + 5 \times \tfrac{1}{32} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32}) + 10 \times \tfrac{1}{64} \\
&= 7 \times (2 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{8} + \tfrac{1}{32} + \tfrac{1}{64}) + 3 \times \tfrac{1}{64}
\end{aligned}$$

La part de chacun sera donc de $2 + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64}$ heqats et il restera $3 \times \frac{1}{64}$.

Extrait de *Réussir l'épreuve de Maths au concours CRPE* N. Auxire, O. Ledantec, F. Guerimand Editions Ellipses.