Comment calculer la dérivée d'une fonction composée

Si f est de la forme $f = g \circ u$, alors $f' = u'.\, g' \circ u$

exemple : $f(x) = (x^2 - 1)^3$

On a : $f = g \circ u$ avec $\begin{cases} g(x) = x^3 \\ u(x) = x^2 - 1 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} g'(x) = 3x^2 \\ u'(x) = 2x \end{cases}$

Or : $f' = u'.\, g' \circ u$

Par conséquent : $f'(x) = 3(x^2 - 1)^2 . 2x = 6x(x^2 - 1)^2$

Si f est de la forme $f = u^n$ avec $n \in \mathbb{Z}^*$, alors $f' = n\, u^{n-1}.\, u'$

exemple 1 : $f(x) = \left(3x^2 + 5x\right)^4$

On a : $f = u^4$ avec $u(x) = 3x^2 + 5x$

Or : $f' = 4u^3.\, u'$

Donc : $f'(x) = 4\left(3x^2 + 5x\right)^3 . (6x + 5)$

exemple 2 : $f(x) = \dfrac{1}{(x^2 - 1)^3}$

c'est-à-dire : $f(x) = (x^2 - 1)^{-3}$

On a : $f = u^n$ avec $u(x) = x^2 + 1$ et $n = -3$

Or : $f' = n\, u^{n-1}.\, u'$

Donc : $f'(x) = -3\left(x^2 + 1\right)^{-4} . (2x)$

$$= -\frac{3 \times 2x}{\left(x^2 + 1\right)^4} = -\frac{6x}{\left(x^2 + 1\right)^4}$$

Si f est de la forme $f=\dfrac{1}{u^n}$, alors $f'=-\dfrac{n.u'}{u^{n+1}}$

exemple : $f(x)=\dfrac{1}{(x^2-1)^3}$

on a : $f=\dfrac{1}{u^n}$ avec $u(x)=x^2+1$ et $n=3$

or : $f'=-\dfrac{n.u'}{u^{n+1}}$

Par conséquent : $f'(x)=-\dfrac{3\times 2x}{\left(x^2+1\right)^4}=-\dfrac{6x}{\left(x^2+1\right)^4}$

Autres méthodes :

- voir formule précédente
- considérons f de la forme $f=\dfrac{1}{u}$ avec $u(x)=(x^2-1)^3$

Comme $u=v^n$, on a $u'=n.v^{n-1}.v'$

C'est-à-dire : $u'(x)=3(x^2-1)^2.(2x)=6x(x^2-1)^2$

on a $f'=\dfrac{-u'}{u^2}$, donc : $f'(x)=\dfrac{-6x(x^2-1)^2}{(x^2-1)^6}=\dfrac{-6x}{(x^2-1)^4}$

Si f est de la forme $f=\sqrt{u}$, alors $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

exemple : $f(x)=\sqrt{x^4+1}$

On a : $f=\sqrt{u}$ avec $u(x)=x^4+1$

Or : $f'=\dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$

Par conséquent : $f'(x)=\dfrac{4x^3}{2\sqrt{x^4+1}}=\dfrac{2x^3}{\sqrt{x^4+1}}$