1)Rappel et complément :

a) Activité 1

....

....

....

b)Activité :

Soit u la suite définie sur IN par : $u_n = \dfrac{\cos(n\pi)}{2n+(-1)^n}$

a)Exprimer u_{2n} et u_{2n+1} en fonction de n

....

....

b)Déterminer $\lim(u_{2n})$ et $\lim(u_{2n+1})$. Que peut-on conclure ?

....

....

Rque : Les suites u_{2n} et u_{2n+1} sont dites deux suites extraites de la suite u

1-1) Définition

Soit u la suite définie sur $I = \{n,\ n\in IN \text{ et } n \geq n_0\}$ et ℓ un réel fini

$\lim(u_n)=\ell \Leftrightarrow$ ....

$\lim(u_n)=+\infty \Leftrightarrow$ ....

b)Théorème 1 :

Soit u la suite définie sur I et ℓ un réel ; (ℓ peut être infinie)

$\lim(u_n)=\ell \Leftrightarrow \lim(u_{2n})=\lim(u_{2n+1}) = \ell$

Dém :..

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Application :

Etudier la limite de la suite u définie par $u_n = (-1)^n$.

....

....

c)Théorème 2 :

Toute suite convergente est bornée

Dém :

....

....

………
………
………

Rque : une suite bornée n'est pas forcement convergente

Contre exemple : $u_n = (-1)^n$.

2)Limite et ORDRE :

a)Théorème 3 :

Si $\begin{cases} \lim(u_n) = l \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a } u_n > 0 \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $l \geq 0$

Dém :……
………
………
………
………
………

Corollaire 1

Si $\begin{cases} \lim(u_n) = l \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a } u_n < 0 \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $l \leq 0$

Corollaire 2 :

Si $\begin{cases} \lim(u_n) = l \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a : } a < u_n < b \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $a \leq l \leq b$

Corollaire 3 :

Si $\begin{cases} \lim(u_n) = l \text{ et } \lim(v_n) = l' \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a } u_n < v_n \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $l \leq l'$

Reflexe : $\lim(u_n)=\ell \Leftrightarrow \lim(u_n - \ell) = 0$

.Dém :

………
………
………

c)Théorème 4:

Soient u et v deux suites définies sur I :

Si $\begin{cases} \lim(v_n) = 0 \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a } 0 \leq |u_n| < v_n \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $\lim(u_n) = 0$

Dém :……
………
………

Corollaire 4 (Théorème de GENDARMES)

Soient u, v et w trois suites définies sur I

Si $\begin{cases} \lim(u_n) = \lim(v_n) = l \quad ; (l \text{ est finie }) \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a } u_n < w_n < v_n \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors la suite w est convergente et on a : lim (w_n) = l

Dém :

………

………

………

………

………

………

Remarque :

$\lim(u_n - \ell) = 0 \Leftrightarrow \lim(u_n) = \ell$

$\lim |u_n| = 0 \Leftrightarrow \lim(u_n) = 0$

d)Théorème 5 :

Soient u et v deux suites définies sur I :

Si $\begin{cases} \lim(v_n) = +\infty \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a : } v_n < u_n \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $\lim(u_n) = +\infty$

Si $\begin{cases} \lim(v_n) = -\infty \\ \text{Il existe un entier p de IN tels que pour tout n de I on a : } u_n < v_n \text{ des que } n > p \end{cases}$

Alors $\lim(u_n) = -\infty$

Dém :………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

Application : Activité 7 p 40

……

……

……

……

……………………………………………………………………………………………………

……

……

……

……

……………………………………………………………………………………………………

Reflexe :

Soit u une suite géométrique de raison q et premier terme a non nul

Si q >1 alors lim $u_n = +\infty$ si a > 0 et lim (u_n) = - ∞ si a < 0

Si q = 1 alors u est constante et lim (u_n) = a

Si $0 < |q| < 1$ alors lim (u_n) = 0

Si q ≤ -1 alors u n'est pas convergente.

Exemple

Activité 6 p 33

………

………

3)Opérations sur les limites :

Tableau des limites

$\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} v_n$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (u_n+v_n)$
L	L'	L+L'
L	+∞	+∞
-∞	L'	-∞
+∞	+∞	+∞
-∞	-∞	-∞
+∞	-∞	No conclusion

$\lim\limits_{n\to+\infty} /u_n/$	$\lim\limits_{n\to+\infty} /v_n/$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (/u_n * v_n/)$
L	L'	L.L'
L≠0	+∞	+∞
+∞	+∞	+∞
0	+∞	No conclusion

$\lim\limits_{n\to+\infty} /u_n/$	$\lim\limits_{n\to+\infty} /v_n/$	$\lim\limits_{n\to+\infty} (/u_n/v_n/)$
L	L'≠ 0	L/L'
+∞	L'	+∞
L	+∞	0
0	0	No conclusion

Exercice :

1)Soit u la suite définie sur IN* par : $u_n = 2(1+\frac{1}{2})(1+\frac{1}{3})\ldots\ldots.(1+\frac{1}{n})$

a)Calculer lim(u_n)

b)Déduire lim($\frac{u_n}{n^2}$)

2)Calculer lim $(1+\frac{1}{n})\ (1+\frac{1}{n+1})\ldots..(1+\frac{1}{2n})$

………

………

………

………

………

………

………

………

………

………

……
……
……
……

4)Suite de type $v_n = f(u_n)$

Théorème 6

Si $\begin{cases} f \text{ est continue sur } I \text{ contenant } l \\ (u_n) \text{ est une suite convergente vers } l \\ \text{Pour tout } n \text{ , on a } u_n \in I \end{cases}$ Alors $\lim (f(u_n))= f(l)$

Dém :

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

Théorème 7

Si $\begin{cases} f \text{ est définie sur } I \\ u_n \in I, \text{ pour tout } n \\ \lim(u_n)=l \text{ (} l \text{ fini ou infini)} \\ \lim\limits_{x \to l} (fx)=L \end{cases}$ Alors $\lim_{n\to+\infty} f(u_n)$ $f(u_n) = L$

Dém :

……
……
……
……
……
……
……
……

Exemple : calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} \tan(\frac{n\pi}{2n+1})$

……
……
……

Corollaire :(Théorème de 4 point)

Si $\begin{cases} u_{n+1} = f(u_n) \\ (u_n) \text{ est convergente vers } l \\ f \text{ est continue sur } I \text{ et en } l \\ u_n \in I, \text{ pour tout } n \end{cases}$

Alors $\ell = f(\ell)$; (u est une suite récurrente)

Dém :………
……

……
……

5)Convergence des suites monotone :

a) Activité 1 p 70

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

b)Théorème 8 :

Soit u une suite définie sur $I \subset IN$

Si $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est majorée} \end{cases}$ Alors (u_n) est convergente vers l et on a : $u_n \leq l$, pour tout $n \in I$

Si $\begin{cases} (u_n) \text{ est décroissante} \\ (u_n) \text{ est minorée} \end{cases}$ Alors (u_n) est convergente vers l et on a : **$u_n \geq l$, pour tout $n \in I$**

c)Théorème 9 :

Si $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (u_n) \text{ est non majorée} \end{cases}$ Alors $\lim(u_n) = +\infty$

Si $\begin{cases} (u_n) \text{ est décroissante} \\ (u_n) \text{ est non minorée} \end{cases}$ Alors $\lim(u_n) = -\infty$.

Dém :

Exercice :

Soit u la suite définie sur IN par $\begin{cases} u_{n+1} = \sqrt{2+u_n} \\ u_0 = 1 \end{cases}$

a)Montrer que pour tout n on a : $0 \leq u_n \leq 2$
b)Etudier la monotonie de la suite u
c)Déduire que u est convergente
d)Déterminer la limite l de u

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

……
……

6)Suites adjacentes

a)Déf :

Soient u et v deux suites définies sur I

On dit que (u_n) et (v_n) sont adjacentes SSi $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$

Remarques :

Si on a : $\begin{cases} (u_n) \text{ est croissante} \\ (v_n) \text{ est décroissante} \\ \lim(u_n - v_n) = 0 \end{cases}$ alors $u_n \leq v_n$

En effet :

Considérons la suite w définie sur I par $w_n = u_n - v_n$ alors on a :

$\begin{cases} W \text{ est croissante (somme de deux suites croissantes)} \\ W \text{ est convergente } (\lim w = 0) \end{cases}$

alors $w_n \leq 0$ (D'après théo 8) par suite $u_n \leq v_n$ AR

b)Théorème 10 :

Si (u_n) et (v_n) sont deux suites adjacentes alors (u_n) et (v_n) sont convergentes vers la même limite

Dém :

……
……
……
……
……
……
……
……
……

Application :

Activité 1 p 43 ;

Ex 21 et Ex 25

……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……
……

....

....