Fiche méthode sur les asymptotes :

Soit f une fonction numérique définie sur D et soit C sa courbe représentative dans un repère $(0, \vec{i}, \vec{j})$.

Comment déterminer une asymptote parallèle aux axes :

Suivant les résultats sur les calculs des limites aux bornes de D, on peut en déduire l'existence d'asymptote(s) parallèle(s) aux axes.

- Si $\lim\limits_{x \to a} \boldsymbol{f(x)} = \pm\infty$ alors la courbe C est asymptote à la droite D d'équation $\boldsymbol{x = a}$
- Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \boldsymbol{f(x)} = \mathbf{b}$ alors la courbe C est asymptote à la droite D d'équation $\boldsymbol{y = b}$ au voisinage de $\pm\infty$.

Comment déterminer une asymptote oblique :

Pour vérifier que la droite Δ d'équation $\boldsymbol{y = ax + b}$ est une asymptote oblique à C, on calcule d'abord et on simplifie l'expression suivante :

$$\boldsymbol{d(x) = f(x) - (ax + b)}$$

puis on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} d(x)$, et si celle ci est **nulle**, alors on peut écrire .

on a $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \boldsymbol{[\, f(x) - (ax + b)\,] = 0} \Rightarrow C$ est asymptote à Δ. au voisinage de $\pm\infty$.

ex : soit la fonction f définie sur $D =]-1\,;+\infty[$ par $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

Montrer que la droite Δ d'équation $y = 2x + 3$ est une asymptote à C.

Résolution :

on a : $d(x) = f(x) - (2x + 3)$

$$= (2x + 3 + \frac{1}{x+1}) - (2x + 3) = \frac{1}{x+1}$$

or $\lim\limits_{x \to \pm\infty} (x + 1) = +\infty$ donc $\lim\limits_{x \to \pm\infty} d(x) = 0$

Par conséquent , comme $\lim\limits_{x \to +\infty} [\, f(x) - (2x + 3)\,] = 0$, on en déduit que C est asymptote à Δ d'équation $y = 2x + 3$ au voisinage de $+\infty$.

Rappel :

Pour déterminer la position de C par rapport à Δ , il faut étudier le signe de $d(x) = f(x) - (ax + b)$.

- si $d(x) > 0$ sur I alors C est au-dessus de Δ sur I .
- si $d(x) < 0$ sur J alors C est en dessous de Δ sur J .