دراسة الدوال

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

A– الانــشـطة

تمرين1

1- حدد رتابة الدالة f و مطاريفها النسبية أو المطلقة إن وجدت في الحالات التالية .

أ- $f(x)=x(x-3)^2$ ب- $f(x)=x-\arctan x$ ج- $f(x)=\sqrt[3]{x^3-x}$

2- حدد عدد جذور المعادلة $x^3+2x^2-7x+1=0$

تمرين 2

أدرس تقعر C_f منحنى الدالة و حدد نقط انعطافه في الحالتين التاليتن(إن كان ممكنا) .

أ- $f(x)=x^4-2x^3-13x$

ب- $f(x)=x|x|$ (لاحظ أن f غير قابلة للاشتقاق مرتين في 0 و مع ذلك تقبل نقطة انعطاف في O(0 ; 0))

ج- $f(x)=\cos x-\sin x$

تمرين 3

حدد المقاربات إن وجدت - أعط الاتجاهات المقاربة في الحالات التالية

أ- $f(x)=\dfrac{x^2+1}{-2x^2+x+3}$ ب- $f(x)=\sqrt[3]{x+1}$ ج- $f(x)=\dfrac{x^2+2x}{x-1}$

د - $f(x)=x+\sqrt{x}$ ر- $f(x)=x+\sin 2\pi x$

تمرين4

1- نعتبر $f(x)=x^3-3x^2+x+3$ بين ان A (1 ;2) مركز تماثل للمنحنى C_f

2- نعتبر $f(x)=(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$

بين ان المستقيم الذي معادلته $x=\dfrac{5}{2}$ محور تماثل للمنحنى C_f

B- تذكير مع بعض الاضافات

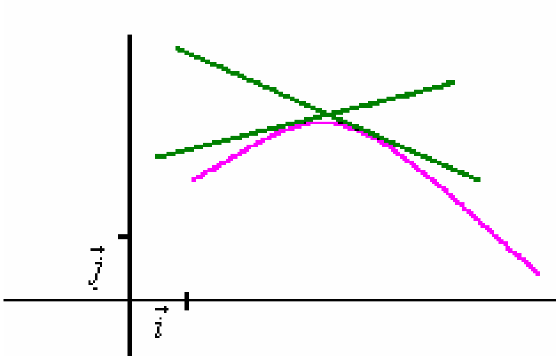
1- تقعر منحنى دالة -- نقطة انعطاف

1-1 تعـريـف

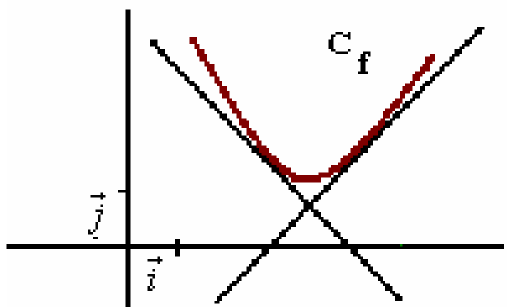
لـتكن f قابـلة للاشـتـقاق على مجال I

نقول إن المنحنى (C_f) محدب إذا كان يوجد فوق جميع مماسـاته

نقول إن المنحنى (C_f) مقعر إذا كان يوجد تحت جميع مماسـاته



مقعر

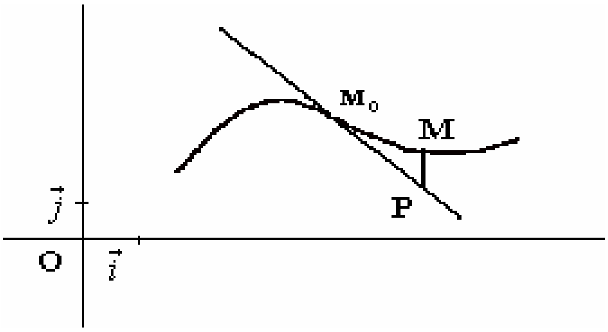


محدب

2-1 تعـريف

لتكن f قابلة للاشـتـقـاق على مجال I و(T) مماسا للمنحنى (C_f) في النقطة $M_0(x_0;f(x_0))$.

لتكن M و P نقطتين لهـما نفس الافصول وينتميان على التوالي إلى (C_f) و(T) إذا انعدم $\overline{PM}$ في x_0 و تغيرت إشارته في مجال مفتوح مركزه x_0 فان النقـطة M_0 نقطة انعطاف للمنحنى (C_f)



3-1 خـــاصيات

f دالة قابلة الاشتـــــــقاق مرتين على مجال I

* إذا كانت f'' موجبة على I فان (C_f) يكون محدبا على I
* إذا كانت f'' سالبة على I فان (C_f) يكون مقعرا على I
* اذا كانت f'' تـنعدم في x_0 من الـمجال I وكان يـوجد $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ بحيث إشارة f'' على $]x_0,x_0+\alpha[$ مخالـفة لإشارة f'' على $]x_0-\alpha,x_0[$ فان $M_0(x_0;f(x_0))$ نقـطة انعطاف للمنحنى (C_f)

ملاحظــــــة قد لا تكون الدالة f قابلة للاشتقاق مرتين ويكون مع ذلك لمبيانها نقطة انعطاف

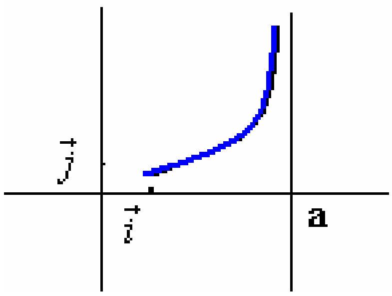
- الفروع اللانهــــائية

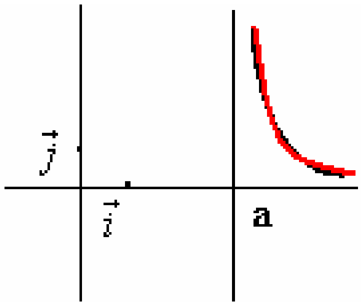
1-2 تعريف

إذا آلت إحدى إحداثـــيتي نقـطة من C منحنى دالة إلى اللانهاية فإننا نقول إن C يقبل فرعا لانهائيا.

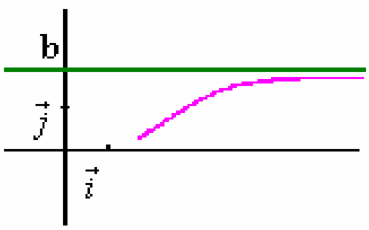
2-2 مستقيم مقارب لمنحنى

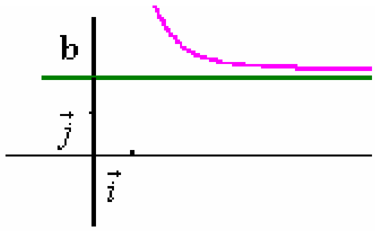
* اذا كان $\lim_{x\to a^+} f(x)=\pm\infty$ أو $\lim_{x\to a^-} f(x)=\pm\infty$ فان المستقيم الذي معادلته $x=a$ مقارب ل C_f





* إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=b$ فان المستقيم ذا المعادلة y =b مقارب ل C_f.





** يكون المستقيم الذي معادلته y =ax + b مقارب للمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\lim_{x\to\pm\infty}(f(x)-(ax+b))=0$$

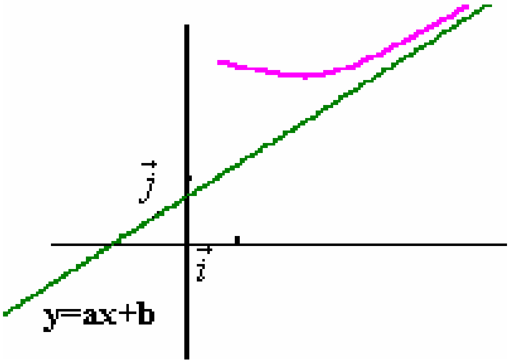
خا صة

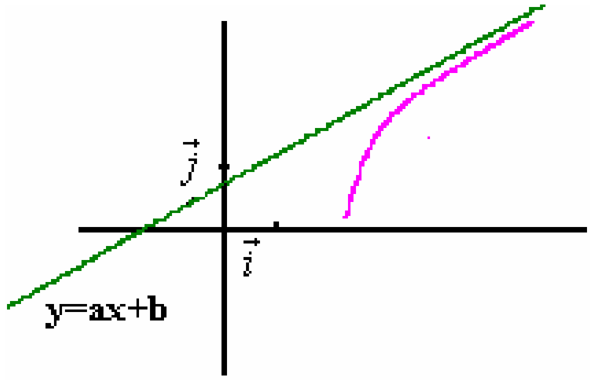
يكون المستقيم ذو المعادلة y = ax + b مقارب لمنحنى C_f إذا وفقط إذا كان

$$\left(\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad ; \quad \lim_{x\to+\infty}(f(x)-ax)=b\right)$$

أو

$$\left(\lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=a \quad ; \quad \lim_{x\to-\infty}(f(x)-ax)=b\right)$$





ملاحظة دراسة إشارة (f (x) – (ax + b)) تمكننا من معرفة وضع المنحنى (C_f) بالنسبة للمقارب المائل.

2-3- الاتجاهات المقاربة

تعاريف

أ – إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل محور الأراتيب كاتجاه مقارب.

ب - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=0$ نقول إن (C_f) يقبل محور الافاصيل كاتجاه مقارب.

ج - إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ و $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)-ax=\pm\infty$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب

بصفة عامة

إذا كان $\lim_{x\to\pm\infty} f(x)=\pm\infty$ $\quad$ $\lim_{x\to\pm\infty} \frac{f(x)}{x}=a$ نقول إن (C_f) يقبل المستقيم ذا المعادلة y= ax كاتجاه مقارب.

3 - مركز تماثل – محور تماثل

3- 1 خاصية

في معلم متعامد , يكون المستقيم الذي معادلته x = a محور تماثل لمنحنى دالة f إذا وفقط إذا كان
$f(2a-x)=f(x) \qquad \forall x\in D_f$

3-2 خاصية

في معلم ما,تكون النقطة E (a ;b) مركز تماثل لدالة f إذا وفقط إذا كان $f(2a-x)=2b-f(x) \qquad \forall x\in D_f$

4- الدالة الدورية

4-1 تعريف

نقول أن f دالة دورية إذا وجد عدد حقيقي T موجب قطعا بحيث
$f(x+T)=f(x) \qquad x-T\in D_f \; ; \; x+T\in D_f \qquad \forall x\in D_f$
العدد T يسمى دور الدالة f .اصغر دور موجب قطعا يسمى دور الدالةf

4- 2 خاصية

إذا كانت للدالة f دور T فان $\quad f(x+nT)=f(x) \qquad \forall x\in D_f ,\forall n\in\mathbb{Z}$

4-3 خاصية

إذا كانت f دالة دورية و T دورا لها فان منحنى الـدالة f على $D_f\cap[x_0+nT;x_0+(n+1)T[$ هـو صورة منحنى الدالة على $D_f\cap[x_0,x_0+T[$ بواسطة الإزاحة ذات المتجهة $nT\cdot\vec{i}$ حيث n عدد صحيح نسـبي.

تمارين حول دراسة الدوال- د1-

الثانية سلك بكالوريا علوم تجريبية

تمرين 1

أدرس f و أنشئ منحناها في الحالات التالية

أ- $f(x)=\sqrt[3]{x^3+1}$ ب- $\begin{cases} f(x)=(2-x)^{\frac{3}{2}} & x \prec 2 \\ f(x)=-\arctan\sqrt{x-2} & x \geq 2 \end{cases}$

تمرين 2

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=\dfrac{x^2}{2-x} & x\in[0;1] \\ f(x)=x-\sqrt{x^2-x} & x\in]-\infty;0[\cup]1;+\infty[\end{cases}$

1- أدرس اتصال f في 0 و 1 وحدد نهاية f عند $-\infty$ و $+\infty$

2- ادرس قابلية اشتقاق f في كل من 0 و1 و أول النتيجتين هندسيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل $x\in\mathbb{R}^*-\{1\}$ و ادرس إشارتها و أعط جدول تغيرات f.

4 - أدرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f $\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm$

تمرين3

لتكن f دالة عددية معرفة بـ $\begin{cases} f(x)=x-2\arctan(x) & x\geq 0 \\ f(x)=\dfrac{x}{x-1} & x\prec 0 \end{cases}$

1- احسب نهاية f عند $-\infty$, $+\infty$

2- بين أن f قابلة للاشتقاق في 0 و أعط معادلة المماس لـ C_f عند النقطة ذات الافصول 0.

3- احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم ادرس تغيرات f.

4- ادرس الفروع اللانهائية لـ C_f ثم أنشئ C_f

5- ليكن g قصور لـ f على $I=]-\infty;0[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين4

نعتبر الدالة f المعرفة على $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ بـ $f(x)=\sqrt{2x+1}-\dfrac{x}{\sqrt{2x+1}}$

1- أ- حدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$ $\lim_{x\to-\frac{1}{2}} f(x)$ و أول النتائج هـــــــــــندسيا .

ب- حدد $f'(x)$ لكل x من $\left]-\frac{1}{2},+\infty\right[$ و أعط جدول تغيرات f

2- أ- بين أن $f''(x)=(2x+1)^{\frac{-5}{2}}(1-x)$ $\forall x\in\left]-\frac{1}{2};+\infty\right[$

ب- بين أن النقطة A ذات الافصول 1 نقطة انعـطاف لـ (C_f)

4- أنشئ (C_f) $\left(\|\vec{i}\|=\|\vec{j}\|=2cm\right)$

5- ليكن g تقابل من $[0;+\infty[$ نحو مجال J يجيب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

تمرين5

نعتبر الدالة f المعرفة على $D=]-\infty;-1]\cup]0;+\infty[$ بـما يلي $f(x)=\frac{1}{x}\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}$

1- أحسب $\lim_{x\to+\infty} f(x)$; $\lim_{x\to-\infty} f(x)$; $\lim_{x\to0^+} f(x)$

2- أ- تحقــق من أن $\frac{f(x)}{x+1}=\frac{x^2-x+1}{x^2\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على اليسار في1- ثم أعــط تأويلا هـــندسيا للنتيجة.

3- بين أن $f'(x)=\frac{-3}{2x^3\sqrt{x^2+\frac{1}{x}}}$ $\forall x\in D-\{-1\}$ و أعط جدول تغــيرات الدالة f

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنشئ (C_f)

5- أ- لتكن g قصور الدالة f على $]-\infty;-1]$ نحو مجالI ينبغي تحديـده.

ب – حــــدد $g^{-1}(x)$ لكـــــل x من I

تمرين6

نعتبر الدالة f المعرفة بـ $f(x)=\sqrt[3]{x^3-3x+2}$

1- أحســــــب $f(1)$ وحــدد D_f

2- أ- أدرس قابلية اشتقاق f على اليمين في 2- ثم أول النتــيجة هندســـيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f في 1 ثم أول النتيجة هندســـيا.

3- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-2;1[\cup]1,+\infty[$ و أعط جــدول تغــــــيرات f

4- أدرس الفـــروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنـــشئ (C_f)

تمرين7

نعتبر الدالة f المعرفة بـ
$$\begin{cases} f(x)=\frac{x}{2}\sqrt{1+\frac{1}{x}} & x\succ0 \\ f(x)=-\frac{x}{2}+\arctan x & x\le0 \end{cases}$$

1- أ- حـدد $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ $\lim_{x\to-\infty} f(x)$.

ب- تأكد أن f مـتصلة في0 .

2- أدرس اشتقاق الدالة f على اليمين في 0 ثم اليسار في0 و أول النتيجتيـــن هندسيا.

3- أ- بين أن f تزايـدية قطعا على $]0,+\infty[$.

ب- حــــدد $f'(x)$ لكــل x من $]-\infty,0[$.

ج- أعـط جـدول التغـيرات f .

4- حدد الفروع اللانهائية للمنحنى (C_f) ثم أنـــشئ (C_f)

أ- لتكن g قصور الدالة f على $]0;+\infty[$ نحو مجالI ينـبغي تحديده

ب - حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من I

تمرين 8

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي
$$\begin{cases} f(x)=\frac{1}{3}x-\sqrt[3]{x} & x\ge0 \\ f(x)=\frac{x}{x^2+1}+\arctan x & x\prec0 \end{cases}$$

1- أحسب $f(8)$; $f(3\sqrt{3})$; $f(-1)$

2- أدرس اشتقاق الدالة f على يمين 0 و يسار 0 ثم أول النتيجتين هندسيا.

3- بين أن

$$\forall x \in]0;+\infty[\quad f'(x)=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt[3]{x^2}-1}{\sqrt[3]{x^2}}\right)$$

$$\forall x \in]-\infty;0[\quad f'(x)=\frac{2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

4- حدد جدول تغيرات f

5- أ- أدرس الفروع اللانهائية

ب- أنشئ منحنى الدالة f في مستوى منسوب إلى معلم.م.م.

6- ليكن g قصور الدالة f على المجال $]1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من $]1;+\infty[$ نحو مجال يجيب تحديده

ب- أنشئ منحنى الدالة g^{-1}

تمرين9

نعتبر الدالة f المعرفة على $\mathbb{R}^+$ بما يلي $f(x)=\sqrt[3]{x}\left(\sqrt[3]{x}-1\right)$

1 - أدرس اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا

2 - احسب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}_+^*$ و أعط جدول تغيرات f

3- I – ادرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f

ب- بين أن $A(1\ ;\ 0)$ نقطة انعطاف للمنحنى C_f ثم أعط معادلة المماس للمنحنى عند هذه النقطة.

ج- أنشئ في معلم .م. م المنحنى C_f $\|\vec{i}\| = 4cm$

4- ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{8}\ ;+\infty\right[$

بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده و حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J ثم أنشئ $C_{g^{-1}}$

تمرين10

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بمايلي

$$\begin{cases} f(x)=\sqrt[3]{x(x-2)} & x\in]-\infty;0]\cup[2;+\infty[\\ f(x)=x-\sqrt{2x} & x\in]0;2[\end{cases}$$

1- أحسب $f(4)$; $f(-2)$

2- تأكد أن f متصلة في 0 و 2

3- أدرس اشتقاق f على اليمين و اليسار في كل من النقطتين 0 و 2 . و أول النتائج هندسيا .

4- أ – بين أن

$$\forall x\in]-\infty;0[\cup]2;+\infty[\quad f'(x)=\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{\left(\sqrt[3]{x(x-2)}\right)^2}\right)$$

$$\forall x\in]0;2[\quad f'(x)=\frac{2\sqrt{x}-\sqrt{2}}{2\sqrt{x}}$$

ب- أعط جدول تغيرات f

1- أدرس الفروع اللانهائية و أنشئ C_f

2- ليكن g قصور الدالة f على $I=[2;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجب تحديده ثم حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J.

ب- أنشئ المنحنى $C_{g^{-1}}$

تمرين11

I- لتكن h الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $h(x)=3x-4x\sqrt{x}-\frac{1}{4}$

1- أعط جدول تغيرات الدالة h على $\mathbb{R}^{+}$

2- استنتج أن $h(x)\leq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}^{+}$

II- لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بما يلي $f(x)=(4x-1)\sqrt{x}-4x^{2}+\frac{1}{2}$

1- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين 0 و أول النتيجة هندسيا.

2- أ- بين أن $f'(x)=\frac{2h(x)}{\sqrt{x}}$ $\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$

ب- أعط جدول تغيرات الدالة f

ج- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f .

3- ليكن g قصور الدالة f على $I=\left[\frac{1}{4};+\infty\right[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{1}{2};\frac{3}{4}\right[$

4- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

(نقبل أن لـ C_f نقطة انعطاف وحيدة أفصولها $\frac{1}{4}$).

تمرين 12

نعتبر f دالة عددية معرفة على $\mathbb{R}^{+}$ بـ $f(x)=1-\frac{x}{4}\left(\sqrt{x}-2\right)^{2}$

1- بين أن f قابلة الاشتقاق على يمين 0 .

2- بين أن $f'(x)=-\frac{1}{2}\left(\sqrt{x}-2\right)\left(\sqrt{x}-1\right)$ $\forall x\in\mathbb{R}_{+}^{*}$ ثم أعط جدول تغيرات الدالة f .

3- أ- أدرس الفرع اللانهائي للمنحنى C_f.

ب- بين أن لـ C_f نقطة انعطاف يتم تحديد زوج إحداثيتيها .

4- ليكن g قصور الدالة f على $I=[4;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يتم تحديده

ب- استنتج أن المعادلة $g(x)=0$ $x\in I$ تقبل حلا وحيدا α من $\left]\frac{64}{9};\frac{121}{16}\right[$.

ج- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J. ثم استنتج أن $\alpha=4+2\sqrt{3}$

د- أنشئ في نفس المعلم المتعامد الممنظم المنحنيين C_f و $C_{g^{-1}}$.

تمرين13

لتكن f الدالة العددية للمتغير الحقيقي المعرفة بما يلي $f(x)=2\arctan\frac{2\sqrt{x}}{x+1}$

1- أ- أحسب $\lim_{x\to+\infty}f(x)$ و $\lim_{t\to0}\frac{\arctan t}{t}$

ت- بين أن $\lim_{x\to0^{+}}\frac{f(x)}{x}=+\infty$ و أول النتيجة هندسيا

2- أدرس التغيرات الدالة f

3- أنشئ المنحنى C_f

4- نعتبر الدالة g قصور f على $I=[1;+\infty[$

أ- بين أن g تقابل من I نحو مجال J يجيب تحديده

ب- حدد $g^{-1}(x)$ لكل x من J

5- بين أن المعادلة $f(x)=x$ تقبل حلا وحيدا α في $[1;2]$

6- نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بـما يلي $\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = f(u_n) \quad \forall n \in \mathbb{N} \end{cases}$

أ- أثبت أن $f(2) \succ \frac{\pi}{3}$

ب- بين أنه $1 \le u_n \le 2 \quad \forall n \in \mathbb{N}$

ت- باستعمال مبرهنة التزايدات المنتهية، بين أنه لكل n من $\mathbb{N}$: $|u_{n+1}-\alpha| \le \frac{1}{4}|u_n - \alpha|$

د- استنتج أن $\lim u_n = \alpha$

تمرين14

I- 1) بين أن $\forall x \in \mathbb{R} \quad 1-x^2 \le \frac{1}{1+x^2} \le 1-x^2+x^4$

2) لتكن h الدالة المعرفة على بـ $h(x) = \arctan x - x + \frac{1}{3}x^3$

أ- بين أن $|h'(x)| \le x^4 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ب- استنتج أن $|h(x)-h(0)| \le x^5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

ج- بين أن $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{x^2} = 0$

II- لتكن g الدالة العددية المعرفة على المجال $]-1;+\infty[$ بـ $g(x) = \frac{x}{2x^2+2x+1} - \arctan\left(\frac{x}{x+1}\right)$

1- أدرس تغيرات g (النهايات ، $g'(x)$، جدول التغيرات)

2- بين أن المعادلة $g(x)=0$ تقبل حلا وحيدا غير منعدم α ينتمي إلى $\left]-1;\frac{-1}{2}\right[$

3- استنتج إشارة $g(x)$ على $]-1;+\infty[$

III- لتكن f الدالة المعرفة بما يلي $\begin{cases} f(x) = \dfrac{\arctan\left(\frac{x}{x+1}\right) - x}{x} & x \in]-1;0[\cup]1;+\infty[\\ f(0) = 0 \quad ; \quad f(-1) = \frac{\pi}{2} - 1 \end{cases}$

1- بين أن f متصلة على $[-1;+\infty[$

2- أحسب $f'(x)$ لكل x من $]-1;0[\cup]1;+\infty[$ و استنتج تغيرات الدالة f

3-أ- باستعمال السؤال (I -2 – ج) أحسب $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan \frac{x}{x+1} - x}{x^2}$ ثم أول النتيجة هندسيا.

ب- أدرس قابلية اشتقاق f على يمين1-

4 - أنشئ المنحنى C_f (نأخذ $\alpha = -\frac{3}{4} \quad ; \quad f(\alpha) = \frac{2}{3}$)