القدرات المستهدفة

ــ التعبير عن المسافة و التعامد بواسطة الجداء السلمي.

ــ استعمال الجداء السلمي في حل مسائل هندسية.

ــ استعمال مبرهنة ألكاشي و مبرهنة المتوسط لحل تمارين هندسية .

I ـ تعاريف :

1 ـ الجداء السلمي لمتجهتين مستقيميتين :

تعريف :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيميتين .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له $\vec{u}.\vec{v}$.

إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان لهما نفس المنحى فإن $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$.

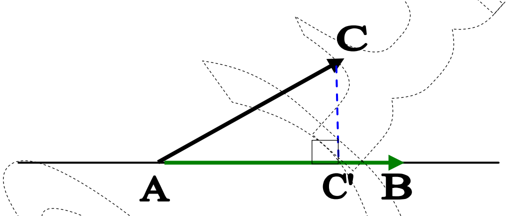
إذا كان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتان لهما منحيان متعاكسان فإن $\vec{u}.\vec{v}=-\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|$

2 ـ الجداء السلمي باستعمال المسقط العمودي:

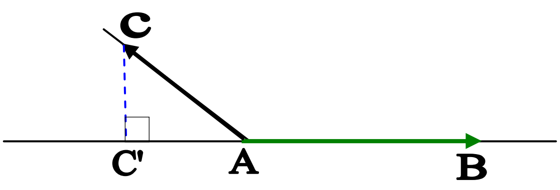
تعريف :

لتكن $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ متجهتين غير منعدمتين من المستوى . و C' المسقط العمودي للنقطة C على المستقيم (AB).

الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ الذي يساوي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}$.



$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=AB\times AC$

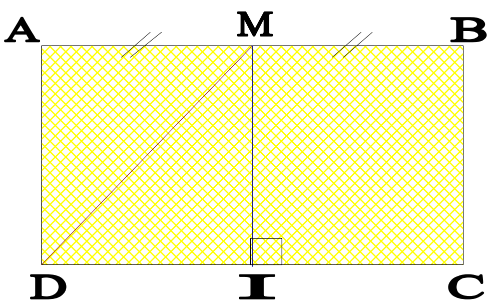


$\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC'}=-AB\times AC$

مثال:

$ABCD$ مربع و M منتصف $[AB]$ و I المسقط العمودي للنقطة M على (CD) .

بحيث $AB=6$ و $BC=2$.



$$\overrightarrow{DM}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{DC}=DI\times DC=3\times 6=18$$

$$\overrightarrow{DB}.\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{DC}.\overrightarrow{DC}=DC\times DC=6\times 6=36$$

$$\overrightarrow{DI}.\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{CB}.\overrightarrow{BC}=-BC\times BC=-2\times 2=-4$$

3 ـ الجداء السلمي باستعمال الصيغة المثلثية:

تعريف :

لتكن A و B و C ثلاث نقط من المستوى .

الجداء السلمي للمتجهتين $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ هو العدد الحقيقي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}$ الذي يساوي $\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}=AB\times AC\times Cos(B\hat{A}C)$.

لتكن $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين غير منعدمتين .

الجداء السلمي للمتجهتين $\vec{u}$ و $\vec{v}$ نرمز له $\vec{u}.\vec{v}$ الذي يساوي $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times Cos(\vec{u},\vec{v})$.

مثال:

ــ $\|\vec{u}\|=5$ و $\|\vec{v}\|=2$ و $Cos(\vec{u},\vec{v})=\dfrac{3}{2}$

لدينا : $\vec{u}.\vec{v}=\|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times Cos(\vec{u},\vec{v})=5\times 2\times\dfrac{3}{2}=15$

4 ـ تعامد متجهتين :

خاصية :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين مستقيميتين .

تكون المتجهتان $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متعامدتين و نكتب $\vec{u}\perp\vec{v}$ إذا و فقط إذا كان جداؤهما السلمي منعدما.

5 ـ خاصيات الجداء السلمي :

$\vec{u}$ و $\vec{v}$ و $\vec{w}$ ثلاث متجهات و k عدد حقيقي .

$$\vec{u}.\vec{v} = \vec{v}.\vec{u}$$
$$(\vec{u}+\vec{v}).\vec{w} = \vec{u}.\vec{w}+\vec{v}.\vec{w}$$
$$(k.\vec{u}).\vec{v} = k(\vec{u}.\vec{v})$$
$$1.\vec{u} = \vec{u}$$
$$\vec{u}.\vec{u} = \vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$$

مثال:

نعتبر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ متجهتين بحيث $\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})=1$ و $\vec{u}.\vec{v}=6$ لنحسب $\|\vec{u}\|$.

لدينا : $\vec{u}.(\vec{u}-\vec{v})=1$ إذن $\vec{u}^2-\vec{u}.\vec{v}=1$ ومنه $\vec{u}^2=\vec{u}.\vec{v}+1$ و بالتالي $\vec{u}^2=6+1$ إذن $\vec{u}^2=7$ ونعلم أن $\vec{u}^2=\|\vec{u}\|^2$.

و بالتالي : $\|\vec{u}\|^2=7$ و نستنتج أن $\|\vec{u}\|=\sqrt{7}$.

II ـ تطبيقات الجداء السلمي:

1 ـ مبرهنة ألكاشي :

مبرهنة:

في كل مثلث ABC لدينا :

$$BC^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times Cos\hat{A}$$

مثال:

ABC مثلث بحيث $AB=4$ و $AC=1$ و $Cos\hat{A}=\frac{3}{4}$

بتطبيق مبرهنة الكاشي : $BC^2 = AB^2+AC^2-2\times AB\times AC\times Cos\hat{A}$

$$BC^2 = 4^2+1^2-2\times4\times1\times\frac{3}{4}$$
$$BC^2 = 16+1-6$$
$$BC^2 = 11$$
$$BC = \sqrt{11}$$

2 ـ مبرهنة المتوسط:

مبرهنة:

ليكن ABM .إذا كانت I منتصف $[AB]$ فإن :

$$MA^2+MB^2 = 2MI^2+\frac{1}{2}\times AB^2$$

مثال:

ABC مثلث و M منتصف $[BC]$ بحيث $AB=2$ و $AC=3$ و $BC=4$ لنحسب طول المتوسط AM .

بتطبيق مبرهنة المتوسط : $AB^2+AC^2 = 2AM^2+\frac{1}{2}\times BC^2$

إذن $2^2+3^2 = 2AM^2+\frac{1}{2}\times4^2$ ومنه $4+9=2AM^2+\frac{1}{2}\times16$ و بالتالي $13=2AM^2+8$ إذن $2AM^2=13-8$

ومنه $AM^2=\frac{5}{2}$ إذن $AM=\sqrt{\frac{5}{2}}$.