# Fiche méthodes sur les asymptotes

## Comment déterminer une asymptote parallèle aux axes

Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$

alors la droite $D$ d'équation $x = a$ est asymptote à la courbe $C_f$

Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$

alors la droite $D$ d'équation $y = b$ est asymptote à la courbe $C_f$ au voisinage

**exemple :** Soit la fonction $f$ définie sur $D_f = \mathbb{R} - \{2\}$ par : $f(x) = \dfrac{3x+1}{x-2}$

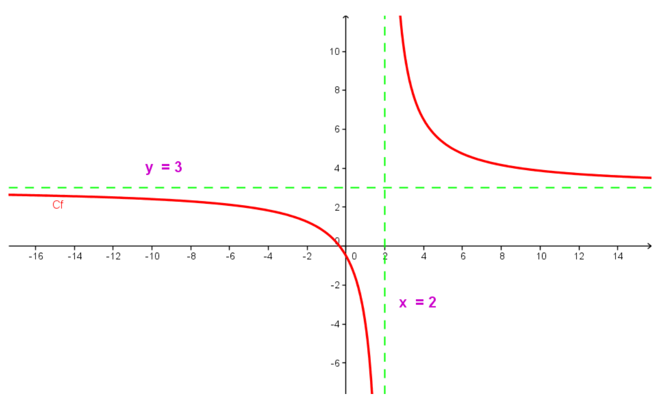
Calculer les limites en 2 à droite et en l'infini
En déduire l'existence d'asymptote(s) éventuelle(s).

**Limite en $+\infty$ :** il faudra d'abord lever l'indétermination

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{3x+1}{x-2} = \lim_{x \to +\infty} \frac{3x}{x} = \lim_{x \to +\infty} 3 = 3 \quad \text{donc} \lim_{x \to +\infty} f(x) = 3$$

il y a une valeur finie et une valeur infinie dans l'expression de la limite de $f$

La droite $D$ d'équation $y = 3$
est asymptote à $C_f$ au voisinage de $+\infty$




**Limite en $2^+$ :**

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to 2} (3x+1) = 7 \\ \lim\limits_{x \to 2^+} (x-2) = 0^+ \end{array}\right\} \text{d'où par quotient : } \lim_{x \to 2^+} f(x) = +\infty$$

Donc la droite $D$ d'équation $x = 2$ est asymptote à la courbe $C_f$

# Comment déterminer une asymptote oblique

Pour vérifier que la droite $\Delta$ d'équation $y = ax + b$ est une asymptote oblique à $C_f$ :

$\rightarrow$ on calcule d'abord et on simplifie l'expression suivante : $d(x) = f(x) - (ax+b)$

$\rightarrow$ puis on calcule $\lim\limits_{x \to \pm\infty} d(x)$, et si celle-ci est nulle, alors on peut conclure.

On a : $\lim\limits_{x \to \pm\infty} \left[ f(x) - (ax+b) \right] = 0 \Rightarrow C_f$ est asymptote à $\Delta$. au voisinage de $\pm\infty$

*exemple :* Soit la fonction $f$ définie sur $D_f = \left]-1;+\infty\right[$ par : $f(x) = 2x + 3 + \dfrac{1}{x+1}$

Montrer que la droite $\Delta$ d'équation $y = 2x+3$ est une asymptote à $C_f$ .

On a : $d(x) = f(x) - (2x+3)$

$$= 2x + 3 + \frac{1}{x+1} - (2x+3) = \frac{1}{x+1}$$

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} (x+1) = +\infty$ donc par quotient : $\lim\limits_{x \to +\infty} d(x) = 0$

Par conséquent, comme $\lim\limits_{x \to +\infty} \left[ f(x) - (2x+3) \right] = 0$, on en déduit que $C_f$ est asymptote à la droite $\Delta$, d'équation $y = 2x+3$, au voisinage de $+\infty$