1.

a) La dérivée de $\sqrt{x}$ est $\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ pour $x \neq 0$. On voit bien pourquoi cette formule n'est pas valable lorsque $x = 0$ (on ne peut pas diviser par 0). Pour étudier la dérivabilité en 0 il faut donc revenir à la définition du nombre dérivé et chercher $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}$.

Or $\dfrac{\sqrt{0+h}-\sqrt{0}}{h}=\dfrac{1}{\sqrt{h}}$. Lorsque h tend vers 0, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ devient de plus en plus grand et dépasse tout nombre donné, $\dfrac{1}{\sqrt{h}}$ n'a pas de limite finie et la fonction $\sqrt{x}$ n'est donc pas dérivable en 0. On peut cependant que sa courbe représentative admet une tangente verticale en 0.

b) Pour $x > 0$, $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$, donc $f'(x) > 0$ et f est croissante sur $]0; +\infty[$. Comme $f(0) = 0$, on a $f(x) > f(0)$ pour tout x positif. Ainsi f est aussi croissante sur $[0; +\infty[$.

c) On a $f(4) = \sqrt{4} = 2$ et $f'(4) = \dfrac{1}{2\sqrt{4}} = \dfrac{1}{4}$. L'équation de la tangente T au point d'abscisse 4 est donc $y = \dfrac{1}{4}(x-4) + 2$, soit $y = \dfrac{1}{4}x + 1$.

d)