

CHAPITRE III

Dualité << Onde - Corpuscule >>

Avec l'introduction du corpuscule photon, une ambiguïté sur la nature du rayonnement électromagnétique apparaît: est-il de nature corpusculaire, comme le préconise l'interprétation de l'effet Compton, ou de nature ondulatoire, comme invitent à le penser les phénomènes d'interférence? S'il possède les deux natures à la fois, comment rendre compte de la dualité <<onde-corpuscule>>?

Le présent chapitre répond à ces questions et montre que la dualité << onde-corpuscule >> est une réalité dont le photon n'a pas l'exclusivité. Elle s'étend à toutes les particules "matérielles" telles que les électrons, protons, neutrons etc...

I - Interférences photon par photon

Pour tenter de répondre aux questions posées, nous allons réaliser une expérience extrême: l'expérience des fentes d'Young avec une source lumineuse si faible qu'elle n'émette qu'un seul photon à la fois. Nous posons une question toute simple :

Un photon seul produit-il un phénomène d'interférence ?

I-1-Rappel de l'expérience classique des fentes d'Young

Une source lumineuse S émet un rayonnement électromagnétique monochromatique de pulsation ω_0 et de vecteur d'onde \mathbf{k}_0 .

$$\omega_0 = 2\pi \nu_0 \quad k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0} \quad c = \frac{\omega_0}{k_0}$$

où c est la vitesse de la lumière.

L'onde (figure 1) se décompose en deux ondelettes φ_1 et φ_2 cheminant respectivement par les fentes S_1 et S_2 .

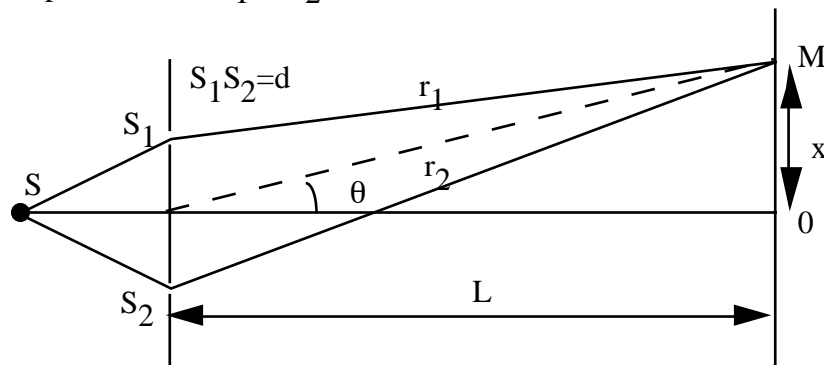


Figure 1 : Expérience des fentes d'Young

A l'arrivée au point M de l'écran d'observation :

$$\varphi_1(x,t) = \frac{a}{2} \exp -i (\omega_0 t - k_0 r_1) \quad \text{avec } r_1 = SS_1 + S_1M$$

$$\varphi_2(x,t) = \frac{a}{2} \exp -i (\omega_0 t - k_0 r_2) \quad \text{avec } r_2 = SS_2 + S_2M$$

La différence de marche sur les trajets (1) et (2) entre les ondes φ_1 et φ_2 est $r_2 - r_1$.
Si θ est petit, il s'écrit:

$$r_2 - r_1 = d \theta = d \frac{x}{L}$$

En M l'amplitude de l'onde résultante φ_M est la somme des amplitudes des deux ondes qui ont exploré les deux chemins possibles soit:

$$\varphi_M = \varphi_1 + \varphi_2 = \frac{a}{2} e^{-i(\omega_0 t - k_0 r_1)} [1 + e^{i k_0 (r_2 - r_1)}]$$

L'intensité lumineuse au point M de coordonnée x s'obtient en multipliant l'amplitude de l'onde résultante par son complexe conjugué soit:

$$I(x) = \varphi_M^* \varphi_M = \frac{a^2}{2} \left(1 + \cos k_0 \frac{d}{L} x \right)$$

(le terme en exponentielle imaginaire disparaît dans le produit de φ_M par son complexe conjugué)

L'intensité lumineuse se répartit suivant un système de franges. Elle est égale au carré de l'amplitude de l'onde résultant de la superposition des ondelettes ayant suivi tous les chemins possibles.

C'est le point de vue adopté en optique ondulatoire.

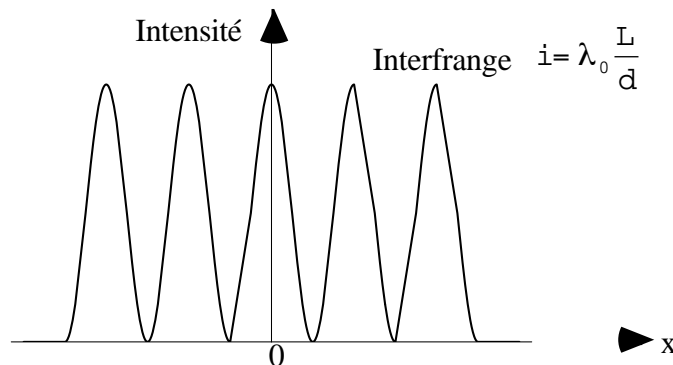


Figure2 : Intensité lumineuse observée dans l'expérience des fentes d'Young

I-2 - Expérience des fentes d'Young photon par photon

Réduisons l'intensité de la source lumineuse, de telle sorte qu'elle n'émette plus qu'un photon à la fois, disons en moyenne un photon par seconde et observons une plaque photographique disposée sur l'écran. A la différence de l'écran qui fait apparaître l'intensité instantanée, la plaque photo garde mémoire de l'information reçue et la cumule.

Avec l'émission d'un photon par seconde la source lumineuse est très faible. On pourrait attendre sur la plaque et dès les premiers instants un système de franges de très faible contraste. Avec le temps ce contraste s'accroîtrait.

Les faits expérimentaux sont très différents.

Au départ : la plaque photo est vierge et uniforme.

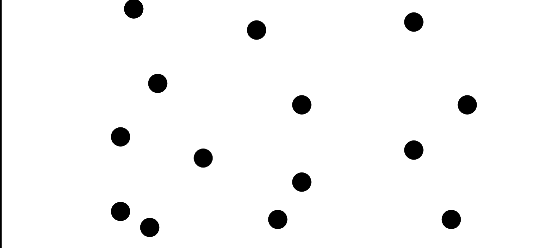
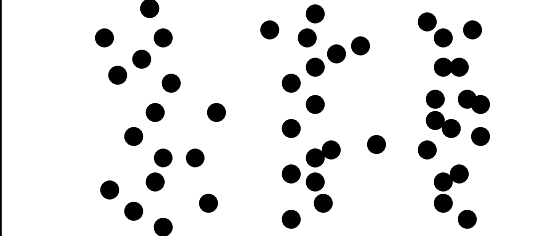
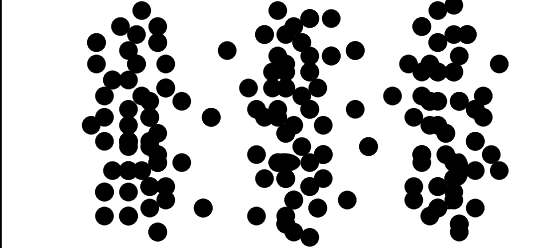
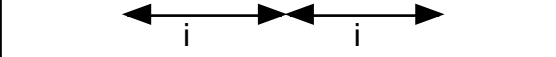
Dans les premiers moments de l'expérience, des impacts nets apparaissent sur la plaque photo. Ils se produisent aléatoirement dans le temps et paraissent disposés au hasard sur le film.	
Au fur et à mesure que le temps s'écoule, les impacts s'accumulent, toujours aléatoirement dans le temps, mais ils semblent concentrés sur certaines régions privilégiées de la plaque photo.	
Dans la limite des temps longs, les régions privilégiées se saturent d'impacts et font apparaître le système de franges calculé classiquement.	
Interfrange de la figure de diffraction classique	

Figure 3: Apparition des impacts lors de l'expérience des fentes d'Young photon par photon

Les observations expérimentales amènent à une double conclusion:

i) Chaque photon émis par la source atteint l'écran à un moment donné et en un endroit précis.

ii) On ne peut prévoir à l'avance et à coup sûr le point d'impact des photons mais on peut en faire une prédiction probabiliste:

Un photon a une chance d'autant plus grande d'arriver en un point M que l'intensité lumineuse calculée classiquement en ce point $|\varphi_M|^2 = \varphi_M^* \varphi_M$ est importante.

Aussi est-on amené à formuler les hypothèses ci après:

- 1) A chaque photon est associée une onde $\varphi(\mathbf{r},t)$
 - 2) L'onde associée à un photon se propage suivant les lois classiques de propagation des ondes, c'est-à-dire en "explorant" tous les chemins possibles. (On dit aussi tous les canaux possibles).
 - 3) L'onde a une signification probabiliste : le carré de son amplitude $\varphi^*(\mathbf{r},t) \varphi(\mathbf{r},t)$ est égal à la densité de probabilité de trouver la particule au point \mathbf{r} à l'instant t .
- Pour les photons, cette onde est simplement celle des champs électriques et magnétiques de l'onde électromagnétique associée

Les hypothèses ci-dessus n'évoquent pas la trajectoire du photon, qui est une notion dépourvue de sens.

Elles ne parlent que de probabilité de manifestation du photon par un point d'impact sur l'écran.

II-Emission de Photons - Spectre d'une source lumineuse

II-1-Onde plane illimitée

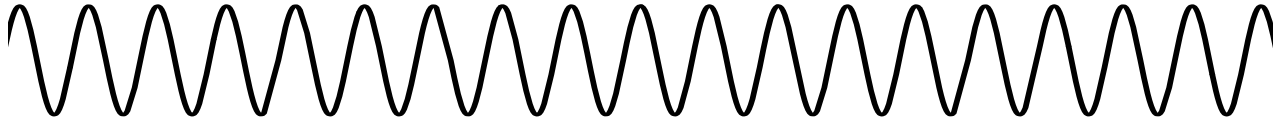


Figure 4 : Onde plane sinusoidale illimitée

Une onde plane sinusoidale illimitée est définie par son vecteur d'onde \mathbf{k}_0 et sa pulsation ω_0 . En notation complexe, elle s'écrit:

$$\varphi(\mathbf{r}, t) = a \exp -i (\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})$$

Suivant le principe énoncé ci-dessus, la densité de probabilité de trouver le photon au point \mathbf{r} et à l'instant t est égal à $\varphi^*(\mathbf{r}, t) \varphi(\mathbf{r}, t) = a^2$, indépendamment de \mathbf{r} et de t .

Une onde plane sinusoidale infinie ne privilégie aucun point de l'espace ni aucun instant particulier. Un photon décrit par cette onde peut se manifester n'importe où et n'importe quand, de façon totalement uniforme.

Le résultat d'une mesure de la position du photon est totalement imprévisible.

Par contre cette onde est caractérisée par une fréquence ω_0 bien définie et un vecteur d'onde \mathbf{k}_0 tout à fait précis. On attend donc que la mesure des grandeurs corpusculaires liées à ω_0 et à \mathbf{k}_0 donnent des résultats prévisibles à coup sûr:

$\hbar\omega_0$ pour l'énergie

$\hbar\mathbf{k}_0$ pour la quantité de mouvement.

Le "on s'attend" n'est à ce niveau qu'une intuition. On ne voit en effet pas pour quelle raison, un photon décrit par une onde fréquence ω_0 manifesterait une énergie différente de $\hbar\omega_0$. S'il vous reste des doutes, postulons le. La seule justification sera en dernier ressort l'accord avec l'expérience.

II-2 - Emission spontanée de la lumière

Revenons à l'émission de la lumière par une assemblée de N_0 atomes.

Au temps $t = 0$, on place tous les atomes dans l'état excité E_p .

Spontanément, ils reviennent à l'état fondamental E_1 en émettant un photon d'énergie a priori égale à $\hbar\omega_0 = E_p - E_1$ (abstraction faite du recul).

En fait, les mesures les plus précises montrent que l'intensité lumineuse n'est pas émise instantanément, immédiatement après que les atomes aient été portés dans l'état excité.

Les expériences montrent que l'intensité lumineuse suit au cours du temps une loi d'évolution exponentielle $I(t) = I_0 \exp(-\frac{t}{\tau})$:

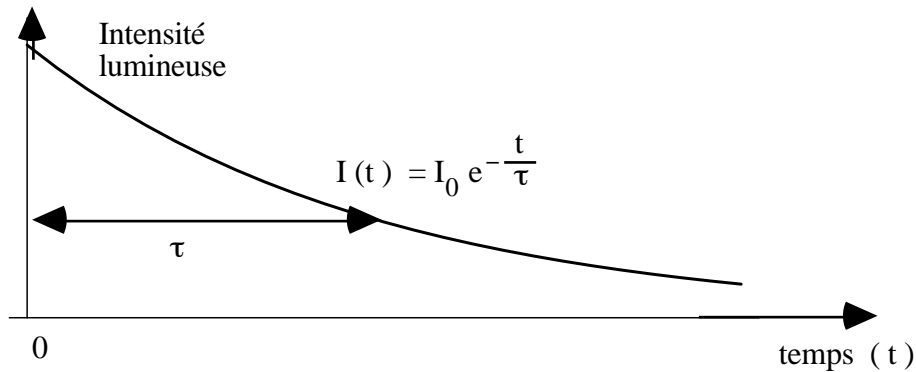


Figure 6 : Evolution temporelle de l'intensité émise par une assemblée d'atomes portés simultanément à l'état excité.

où τ apparaît comme une grandeur caractéristique indiquant le laps de temps au cours duquel la lumière est émise de façon significative.
63% de l'énergie lumineuse est émise entre 0 et τ . 86% entre 0 et 2τ .

Puisque $I(t)$ est proportionnelle au nombre de photons émis par unité de temps, et donc au nombre de transitions atomiques par unité de temps, il faut admettre que le nombre d'atomes qui se désexcitent par unité de temps est proportionnel à $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

La population d'atomes situés dans l'état excité suit une loi d'évolution dictée par:

$$\frac{dN(t)}{dt} \approx - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Aussi, compte tenu de la condition initiale, cette population est égale à l'instant t à:

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Les atomes se comportant de façon indépendante les uns par rapport aux autres, l'observation macroscopique est le résultat de processus microscopiques qu'il faut analyser en termes probabilistes.

Il nous faut admettre que pour *chaque* atome, la probabilité de demeurer au temps t à l'état excité est égale à $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. La densité de probabilité qu'il émette un photon à cet instant est sa dérivée soit: $\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

τ apparaît aussi comme un temps caractéristique de durée de vie des atomes dans l'état excité.

II-3 Onde associée aux photons émis

Après nous être situés du côté de l'observateur examinant les atomes, plaçons nous maintenant du côté de l'observateur examinant les photons et se posant la question fondamentale:

Quelle est l'onde associée à chacun des photons émis par la source?

Nous savons déjà que la densité de probabilité de manifestation de la particule photon est égale au carré de la norme de l'amplitude de l'onde associée.

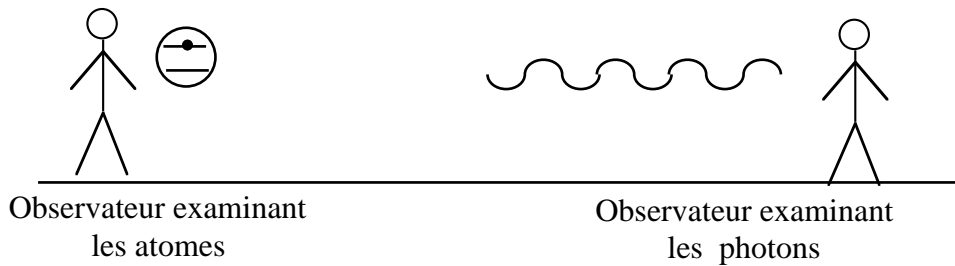


Figure 6: Observateurs se penchant sur l'atome et sur l'onde

Puisque la densité de probabilité d'apparition d'un photon est égale à la probabilité de désexcitation d'un atome: $\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = |\varphi(t)|^2$, la norme de d'onde qui lui est associée est $\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)$.

Nous pouvons par ailleurs imaginer que l'onde présente un terme oscillant de pulsation ω_0 (qui disparaît dans la norme) rappelant la fréquence liée aux niveaux d'énergie impliqués dans la transition c'est à dire tel que $\hbar\omega_0 = E_p - E_1$.

On peut penser raisonnablement que l'onde associée au photon a pour forme:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau}}$$

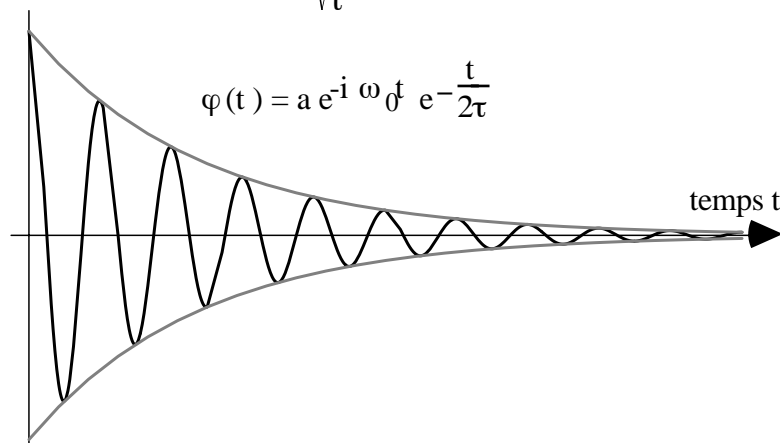


Figure 7 : Onde associée au photon émis par un atome

τ apparaît maintenant comme caractéristique de "l'intervalle de temps" au cours duquel l'onde présente une amplitude significative.

Il est à remarquer que la probabilité d'apparition du photon entre l'instant $t=0$ et $t=\infty$ est 1 et que:

$$\int_0^{\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 1$$

Mais cette onde, déduite de considérations sur le temps de vie de l'état excité et de l'intervalle de temps au cours duquel on a toutes les chances d'observer le photon, n'est plus une onde plane sinusoïdale infinie de pulsation ω_0 .

On peut avoir quelque doute sur l'affirmation que le résultat d'une mesure de l'énergie du photon sera à coup sûr $\hbar\omega_0$.

Vous êtes peut être en train de vous demander pourquoi?

Est ce que le fait de multiplier une sinusoïde infinie par une exponentielle décroissante change quelque chose?

Eh bien cela change tout!

Pour bien le comprendre, il nous faut faire appel à l'analyse de Fourier.

II-4 - Analyse de Fourier

L'analyse de Fourier fait partie de votre programme de mathématique. Vous la verrez en détail en fin d'année. Voyons ici l'aspect essentiel.

Moyennant certaines conditions d'existence dont nous ne nous préoccupons pas, une fonction "quelconque" $\varphi(t)$, non périodique, peut s'écrire comme la somme continue d'ondes planes sinusoïdales infinies suivant la relation:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} A(\omega) e^{-i\omega t} d\omega$$

où $A(\omega)$ est appelée transformée de Fourier de $\varphi(t)$. $A(\omega)$ se déduit de $\varphi(t)$ par une formule de transformation inverse:

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) e^{i\omega t} dt$$

Une fonction "quelconque" $\varphi(t)$ apparaît comme une superposition d'ondes planes sinusoïdales infinies.

Cela se met bien en évidence si on discrétise l'intégrale et que l'on écrit:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \left[A_1 e^{-i\omega_1 t} + A_2 e^{-i\omega_2 t} + A_3 e^{-i\omega_3 t} + \dots \right]$$

Et ceci, sans condition sur les ω_i , comme c'était le cas pour la décomposition en série de Fourier. Les ω_i balaient *tout* le spectre de fréquence.

Vous verrez en mathématique que les conditions sur les ω_i réapparaissent spontanément si $\varphi(t)$ est périodique (dans ce cas, les ω_i sont les multiples de la fréquence fondamentale).

Ainsi dans la décomposition de $\varphi(t)$, toutes les sinusoides infinies de fréquences ω sont représentées, chacune avec un poids $A(\omega)$ et il est tout à fait équivalent de connaître $\varphi(t)$ ou de se donner la distribution $A(\omega)$.

II-5 Analyse de Fourier de l'exponentielle amortie

L'onde amortie n'est pas une sinusoïde infinie, mais une superposition de sinusoïdes infinies où toutes les fréquences ω sont représentées.

Il est facile de montrer que la transformée de Fourier de la fonction décrivant l'onde associée à un photon émis par un atome:

$$\varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\omega_0 t} e^{-\frac{t}{2\tau}} \text{ pour } t > 0 \quad \text{et} \quad \varphi(t) = 0 \text{ pour } t < 0$$

s'écrit:
$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\tau}} \left[\frac{1}{-i(\omega - \omega_0) + \frac{1}{2\tau}} \right]$$

Les sinusoïdes infinies dont la contribution sont les plus importantes sont celles dont la norme $|A(\omega)|$ est grande: ce sont celles dont les fréquences sont proches de ω_0 .

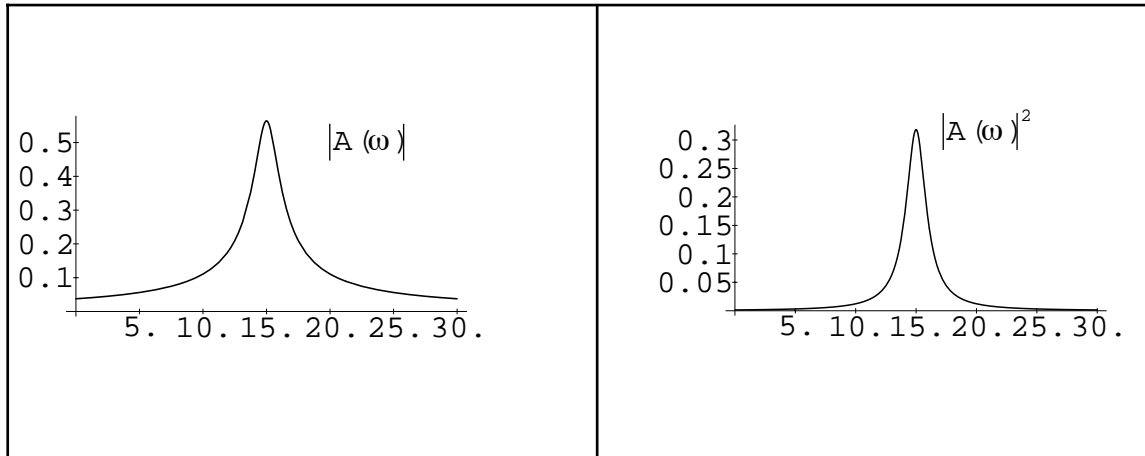


Figure 8 Profil de $|A(\omega)|$ et de $|A(\omega)|^2$ pour $\omega_0 = 15$ et $\tau = 0.5$

II-6 Résultat de mesure de l'énergie

Revenons à la mesure de l'énergie des photons émis par la source de durée de vie τ .

Nous avons vu que le résultat de la mesure de l'énergie du photon décrit par une onde plane sinusoïdale infinie $\varphi(t) = \exp -i (\omega_0 t - \mathbf{k}_0 \mathbf{r})$ est précisément et à coup sûr $\hbar \omega_0$.

Eh bien si un photon est décrit par une superposition d'ondes planes sinusoïdales infinies où toutes les fréquences ω sont représentées, alors le résultat de la mesure de l'énergie est $\hbar \omega$ avec la densité de probabilité $|A(\omega)|^2$.

$|A(\omega)|^2 d\omega$ est la probabilité de trouver un résultat d'énergie compris entre $\hbar \omega$ et $\hbar (\omega + d\omega)$

De même qu'un photon apparaît au temps t avec la densité de probabilité $|\varphi(t)|^2$, il apparaît doué de la fréquence ω avec la densité de probabilité $|A(\omega)|^2$.

$$|A(\omega)|^2 = \frac{1}{2\pi\tau} \frac{1}{(\omega - \omega_0)^2 + 1/4\tau^2}$$

Il est à remarquer que la probabilité de trouver une fréquence parmi toutes les fréquences possibles est 1, ce qui est cohérent avec:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = 1$$

I-7-Spectre lumineux de la source.

Si la source émet finalement un nombre de photons N_0 grand, les résultats de mesure de la pulsation ω vont donner un spectre reproduisant $|A(\omega)|^2$.

La source apparaît comme polychromatique. $|A(\omega)|^2$ est la densité spectrale d'énergie lumineuse.

III- Principe d'incertitude.

III-1-Durée de vie et largeur spectrale

Appelons Δt l'intervalle de temps sur lequel $|\varphi(t)|^2$ est grand. Il est de l'ordre de grandeur de τ .

Et $\Delta\omega$ l'intervalle de fréquence sur lequel $|A(\omega)|^2$ est important. Il est de l'ordre de grandeur de $1/\tau$.

Il apparaît que le produit de ces deux quantités est de l'ordre de grandeur de l'unité.

Cela signifie que si la durée de vie des atomes dans l'état excité est petite, alors la largeur spectrale de la source est grande.

A l'opposé, si la durée de vie des atomes dans l'état excité est grande, alors la largeur spectrale de la source est faible et celle-ci devient plus monochromatique.

Nous allons développer cette idée tout à fait fondamentale au cours des paragraphes suivants.

III-2 Train d'onde

Voyons un nouvel exemple tout à fait schématique et très instructif d'onde associée à une source polychromatique.

Considérons une onde "sinusoïdale" limitée à l'intervalle de temps $-\tau/2$, $+\tau/2$ et de pulsation "apparente" ω_0 (voir figure)

$$\left\{ \begin{array}{ll} \varphi(t) = \frac{1}{\sqrt{\tau}} e^{-i\omega_0 t} & \text{pour } -\tau/2 < t < +\tau/2 \\ = 0 & \text{en dehors de cet intervalle} \end{array} \right.$$

Il est essentiel de noter que cette onde, appelée train d'onde, n'est pas une onde plane sinusoïdale infinie puisqu'elle est limitée dans le temps.

La densité de probabilité de manifestation d'un photon auquel cette onde est associée est:

$$P(t) = \varphi^*(t) \varphi(t)$$

$$\left\{ \begin{array}{ll} P(t) = 1/\tau & \text{Dans l'intervalle de temps } -\tau/2, +\tau/2. \\ = 0 & \text{En dehors de cet intervalle} \end{array} \right.$$

Le photon présente une probabilité uniforme de se manifester dans l'intervalle de temps $\Delta t = \tau$.

De nouveau, posons nous la question du résultat de mesure de l'énergie.

Comme toute fonction de t , $\varphi(t)$ peut s'écrire comme une superposition d'ondes planes sinusoïdales infinies dont les poids sont les $A(\omega)$.

$$A(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau/2}^{+\tau/2} a e^{-i\omega_0 t} e^{i\omega t} dt = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\sin(\omega - \omega_0) \tau/2}{(\omega - \omega_0) \tau/2}$$

$A(\omega)$ est centrée autour de ω_0 , ce qui signifie que ce sont surtout des fréquences voisines de ω_0 qui permettent de reconstituer $\varphi(t)$. Mais comme précédemment, des fréquences très éloignées de ω_0 sont aussi nécessaires.

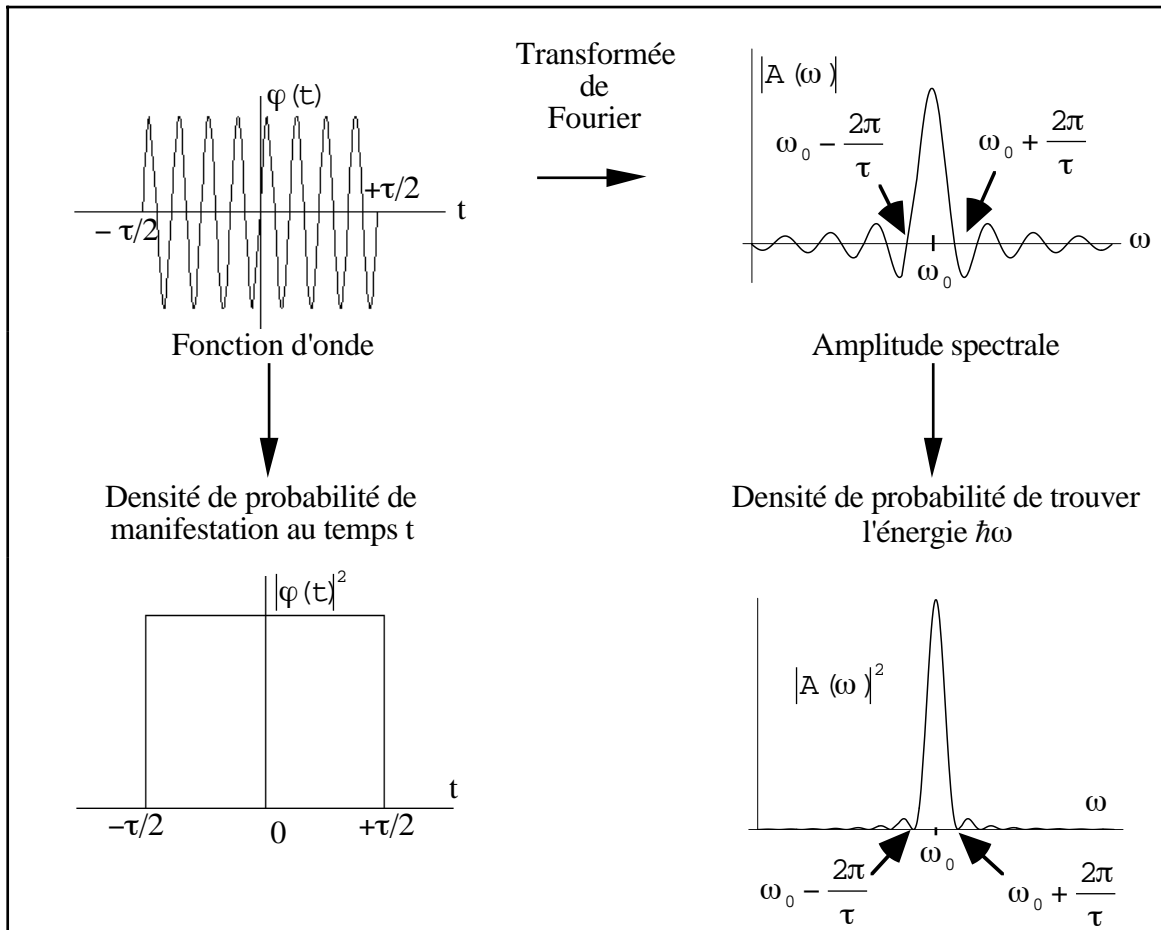


Figure 9 : Exemple du train d'onde.

Le spectre donné, $|A(\omega)|^2$ est essentiellement concentré entre les deux noeuds entourant ω_0 situés en $\omega_0 - 2\pi/\tau$ et $\omega_0 + 2\pi/\tau$, soit sur une gamme de pulsation $\Delta \omega \approx \pi/\tau$. De nouveau, le produit $\Delta t \cdot \Delta \omega$ est de l'ordre de grandeur de l'unité.

III-3 Propriétés remarquables des transformées de Fourier.

Avant de généraliser, voyons deux propriétés remarquables de la transformée de Fourier:

i) si $\varphi(t)$ est normalisée au sens de \mathbb{L}^2 , alors $A(\omega)$ l'est aussi:

$$\text{si } \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} |\varphi(t)|^2 dt = 1 \quad \text{alors} \quad \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} |A(\omega)|^2 d\omega = 1$$

ii) si on définit :

$$\bar{t} = \int_{t=-\infty}^{t=+\infty} t |\varphi(t)|^2 dt \quad \text{et} \quad \bar{\omega} = \int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} \omega |A(\omega)|^2 d\omega$$

les valeurs moyennes de t et de ω pondérées par les carrés des normes de $\varphi(t)$ et de $A(\omega)$

et:

$$\Delta t = \left[\int_{t=-\infty}^{t=+\infty} (t - \bar{t})^2 |\varphi(t)|^2 dt \right]^{1/2} \quad \text{et} \quad \Delta \omega = \left[\int_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} (\omega - \bar{\omega})^2 |A(\omega)|^2 d\omega \right]^{1/2}$$

les écarts quadratiques moyens

alors le produit

$$\Delta \omega \Delta t \geq \frac{1}{2}$$

Cela signifie que le produit du laps de temps Δt durant lequel $|\varphi(t)|^2$ est grand, multipliée par $\Delta \omega$, l'intervalle de fréquence sur lequel $|A(\omega)|^2$ est important, ne peut pas être aussi petit que l'on veut. Il est supérieur à 1/2

II-5 Principe d'incertitude

La prédiction de l'instant auquel va apparaître le photon et celle de la fréquence qu'il va manifester apparaissent comme limitées.

On dispose seulement d'une plage de temps Δt et d'un domaine de fréquence $\Delta \omega$ sur lesquels ont toutes les chances de trouver le photon.

Et fait remarquable: le produit de ces deux grandeurs est au moins égal à 1/2: $\Delta \omega \Delta t \geq 1/2$ soit aussi compte tenu de $E = \hbar \omega$:

$$\Delta E \Delta t \geq \hbar / 2$$

En clair: si l'onde est telle que la fourchette de temps au cours duquel le photon va se manifester est resserrée, alors le domaine d'énergie sur lequel on a toutes les chances de trouver le photon est élargi.

Une plus grande "certitude" sur la date de manifestation du photon entraîne une plus forte incertitude sur le résultat de mesure de l'énergie.

On peut se convaincre facilement de cette dualité à partir du train d'onde.

Le cas limite $\tau = \text{infini}$ est celui de la sinusoïde infinie. Elle permet de prévoir à coup sûr le résultat d'une mesure de l'énergie mais ne donne plus la moindre information sur l'instant auquel le photon va se manifester.

La limite $\tau = 0$ permet de prévoir à coup sûr la date de manifestation du photon, mais $|A(\omega)|^2$ tend vers 1 uniformément, ce qui signifie que le résultat d'une mesure de l'énergie devient imprévisible.

III-5 Peut-on encore parler de niveaux d'énergie?

Nous avons admis au début de ce paragraphe que l'atome présentait deux niveaux d'énergie séparés de $\hbar \omega_0$.

Puis nous avons attribué un temps de vie τ au niveau excité et avons déduit qu'en conséquence l'énergie du photon émis n'était plus $\hbar \omega_0$ à coup sûr mais pouvait s'écarter de cette valeur d'autant plus que le temps de vie était court.

Il serait plus judicieux de représenter les niveaux d'énergie non fondamentaux avec des traits légèrement épaissis et de dire que le niveau présente lui même une certaine largeur.

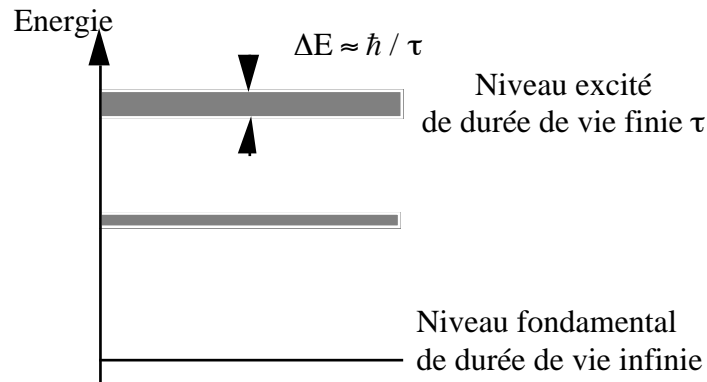


Figure 10 Niveaux d'énergie rappelant la largeur spectrale

Une valeur typique de τ étant de 10^{-10} s la largeur d'un niveau excité serait de $\Delta E = 10^{-5}$ eV.

Pour certains niveaux à temps de vie très court, ΔE est beaucoup plus grand.

Pour le niveau fondamental à durée de vie infinie, $\Delta E = 0$.

IV Extension spatiale du principe d'incertitude

Jusqu'à présent, nous nous sommes attachés à l'évolution temporelle de l'onde en nous situant implicitement au point origine $x=0$.

Plutôt que de nous fixer en un point de l'espace et de suivre l'évolution temporelle de l'onde, suspendons maintenant le temps et examinons l'évolution spatiale de l'onde.

Une onde plane sinusoïdale infinie s'écrit:

$$\varphi(\mathbf{r}) = a e^{i \mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{r}} = e^{i(k_{0x}x + k_{0y}y + k_{0z}z)}$$

$\varphi^*(\mathbf{r}) \varphi(\mathbf{r})$ est la densité de probabilité d'observer en \mathbf{r} un photon de quantité de mouvement $\hbar \mathbf{k}_0$ bien précise.

De façon analogue à ce que nous avons pour la partie temporelle, l'onde illimitée représente un photon dont la probabilité de présence est uniforme dans tout l'espace.

Pour représenter un photon dont la probabilité de présence est restreinte à une région délimitée de l'espace, il faut que la densité de probabilité de présence $|\varphi(\mathbf{r})|^2$ ne soit significative que dans la dite région de l'espace et que son intégrale étendue à tout l'espace soit égale à 1.

Une telle onde peut être construite comme une superposition d'ondes planes infinies selon:

$$\varphi(\mathbf{r}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int A(\mathbf{k}) \exp(i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k} \quad \text{avec} \quad A(\mathbf{k}) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{3/2} \int \varphi(\mathbf{r}) \exp(-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

Le résultat de la mesure de la position est \mathbf{r} avec la densité de probabilité $|\varphi(\mathbf{r})|^2$.

Le résultat de la mesure de la quantité de mouvement est \mathbf{k} avec la densité de probabilité $|A(\mathbf{k})|^2$.

En définissant:

$\Delta x, \Delta y, \Delta z$ les intervalles de composante de position sur lequel le photon a toutes les chances d'être trouvé.

$\Delta p_x, \Delta p_y, \Delta p_z$ les intervalles de composante de quantité de mouvement sur lesquels vont se concentrer la majorité des résultats de mesure.

On montre que de façon similaire au couple temps-énergie, la transformée de Fourier conduit à trois nouvelles relations d'incertitude:

$$\Delta x \Delta p_x \geq \hbar / 2 \quad \Delta y \Delta p_y \geq \hbar / 2 \quad \Delta z \Delta p_z \geq \hbar / 2$$

Composante par composante, une plus grande certitude sur le résultat prévisible de mesure de la position de la particule entraîne une plus grande incertitude sur le résultat prévisible de mesure de la quantité de mouvement, et inversement.

V Dualité onde-corpuscule pour les particules matérielles

V-1 Relation de De Broglie

Jusqu'à présent nous avons associé à l'onde champ électromagnétique une particule: le photon.

De Broglie fut le premier à proposer la démarche inverse c'est à dire à associer des ondes aux particules "matérielles" telles que l'électron.

La démarche historique de De Broglie mérite d'être rapportée. Nous sommes en 1923, le modèle de Bohr a été proposé 4 années auparavant. L'atome est présenté comme un système "solaire" dont le noyau est le centre et les électrons situés sur des orbites sont les planètes. Le calcul des relations liant les rayons des orbites aux énergies des électrons est classique mais il faut ajouter une condition de quantification, à savoir que le moment cinétique est un multiple de \hbar : $\sigma = n\hbar$.

Manifestement, ce modèle a un certain succès puisqu'il explique les différentes séries de raies d'émission de l'hydrogène: série de Balmer etc... N'empêche qu'il est difficile d'admettre une condition de quantification complètement parachutée. Et chacun de se demander comment introduire logiquement une quantification.

Comme souvent en pareil cas, chacun scrute ses connaissances antérieures et essaie de trouver quelque chose qui lui rappelle une discrétisation.

De Broglie qui avait travaillé durant la guerre sur les ondes radios comme télégraphiste connaissait les ondes stationnaires. Il savait que l'imposition de conditions aux limites discrétise les longueurs d'onde possibles. Ainsi une corde de longueur L entretient les fréquences telles que L soit un nombre entier de demi-longueurs d'onde.

L'idée fut alors d'associer aux électrons de l'atome une onde telle que les périmètres des orbites de rayon a soient des nombres entiers de longueurs d'onde, c'est à dire d'imposer:

$$2\pi a = n \lambda.$$

Qui n'est compatible avec l'hypothèse de Bohr de quantification du moment cinétique:

$$\sigma = p a = n \hbar$$

que si l'on pose:

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

De Broglie suggéra que la théorie se trouverait confirmée expérimentalement si l'on observait avec les électrons un phénomène de diffraction tel que celui que fournit la lumière.

La démonstration éclatante de l'hypothèse de De Broglie fut apportée par Davisson et Germer qui observèrent le phénomène de diffraction des électrons par un cristal de nickel en 1927.

Ce phénomène est largement utilisé aujourd'hui en microscopie électronique.

Il est à noter que la valeur de p à considérer est sa valeur relativiste, qui diffère peu de la valeur classique si la vitesse de déplacement de la particule est faible comparée à celle de la lumière.

V-2 Relation de Planck-Einstein

Rappelons les relations établies pour les photons entre les grandeurs corpusculaires et ondulatoires:

A une onde de fréquence ω et de vecteur d'onde \mathbf{k} est associé un photon d'énergie $E = \hbar\omega$ et de quantité de mouvement $\mathbf{p} = \hbar\mathbf{k}$.

Généralisons à toute particule la relation entre quadrivecteurs énergie-impulsion et fréquence-vecteur d'onde:

$${}^4\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \\ i \frac{E}{c} \end{pmatrix} \quad {}^4\mathbf{k} = \frac{{}^4\mathbf{p}}{\hbar} = \begin{pmatrix} k_x \\ k_y \\ k_z \\ i \frac{\omega}{c} \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathbf{p} = \hbar \mathbf{k} \\ E = \hbar \omega \end{cases}$$

Ceci est mathématiquement cohérent car le produit ${}^4\mathbf{k} \cdot {}^4\mathbf{r} = (\mathbf{k}\mathbf{r} - \omega t)$, qui est la phase d'une onde, est nécessairement un scalaire.

Comme tel, il doit être invariant par changement de référentiel. Si ${}^4\mathbf{r}$ est un quadrivecteur, alors ${}^4\mathbf{k}$ l'est aussi.

V-3 Les relations de dispersion

On appelle relation de dispersion la relation qui lie le vecteur d'onde \mathbf{k} à la fréquence ω , ou de façon équivalente qui lie la quantité de mouvement \mathbf{p} à l'énergie E .

La relation de dispersion est contenue dans l'invariant relativiste $|{}^4\mathbf{p}|^2$ qui s'écrit communément:

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$$

Et prend pour le photon la forme particulière:

$$E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = 0$$

V-4 Définition du paquet d'ondes

Vu les relations de dispersion, \mathbf{p} et E (ou \mathbf{k} et ω) ne sont pas des grandeurs indépendantes.

Si l'on se donne \mathbf{p} , alors $E = E(\mathbf{p})$ est imposé

Si l'on se donne \mathbf{k} , alors $\omega = \omega(\mathbf{k})$ est imposé.

Et finalement, si l'on se donne $A(\mathbf{k})$, on se donne aussi $A(\omega)$.

Une onde plane dans sa dimension spatio-temporelle s'écrivant:

$$\exp - i (\omega(\mathbf{k}) t - \mathbf{k} \mathbf{r})$$

Et une onde quelconque s'écrivant comme une superposition d'ondes planes selon:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \int A(\mathbf{k}) \exp - i (\omega(\mathbf{k}) t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}) d\mathbf{k}$$

$\Psi(\mathbf{r},t)$ est une superposition d'ondes planes sinusoïdales.

De façon imagée, une telle superposition est appelée paquet d'ondes.

$|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ est la densité de probabilité de trouver la particule au point \mathbf{r} et à l'instant t .

V-5 Propagation du paquet d'ondes

Vitesse de phase

Chaque composante du paquet d'ondes se déplace à une vitesse $v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$ appelée vitesse de phase.

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k} = \frac{E}{p}$$

Vu la relation de dispersion, la vitesse de phase dépend de ω , sauf pour le photon où elle est égale à la vitesse de la lumière c .

Cependant puisque $A(\mathbf{k})$ et $A(\omega)$ sont en général des fonctions peu étalées, les vitesses de phase des ondes constituant le paquet d'ondes sont voisines (mais non égales) et on dira que la vitesse de phase du paquet d'ondes est la vitesse de phase de l'onde dont la fréquence est la fréquence moyenne ω_0 .

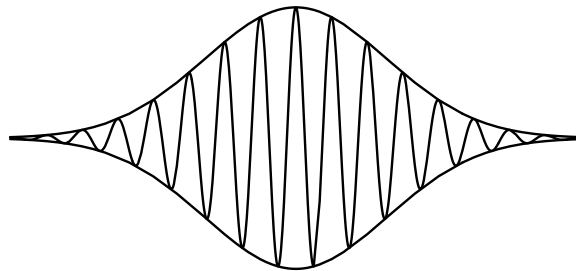
Vitesse de groupe

Au lieu de considérer les ondes individuelles composant le paquet d'ondes, examinons l'évolution temporelle de la courbe de densité de probabilité de présence $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$.

Figure 11 Paquet d'ondes.

Les composantes du paquet d'ondes se translatent avec la vitesse de phase v_φ

Le maximum du paquet d'ondes se déplace avec la vitesse de groupe v_g .



Celle-ci présente un maximum là où les sinusoïdes infinies composant le paquet d'ondes sont "le plus" en phase.

Ce maximum se déplace avec une vitesse v_g appelé vitesse de groupe.

La phase des ondes $(\omega(\mathbf{k}) t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ est fonction \mathbf{k} .

Les ondes élémentaires sont au mieux en phase si celle-ci varie peu avec \mathbf{k} , c'est à dire si $(\omega(\mathbf{k}) t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})$ est un extremum.

$$\frac{d(\omega(\mathbf{k})t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r})}{d\mathbf{k}} = 0 \quad \text{soit :} \quad \frac{d(\omega(\mathbf{k}))}{d\mathbf{k}} t - \mathbf{r} = 0 \quad \text{ou} \quad \mathbf{v}_g = \frac{d(\omega(\mathbf{k}))}{d\mathbf{k}}$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{d(\omega(\mathbf{k}))}{d\mathbf{k}} = \frac{d(E(\mathbf{p}))}{d\mathbf{p}}$$

La vitesse de groupe est la vitesse de propagation du maximum de probabilité de présence de la particule.

Si la courbe de densité de probabilité de présence est très pointue, la particule a toutes les chances de se trouver "à" cette position. La vitesse de groupe doit donc être rapprochée de la vitesse "mécanique" des particules.

V-5 Paquet d'onde relativiste

Revenons à la relation de dispersion $E^2 - \mathbf{p}^2 c^2 = m^2 c^4$.

La différentielle s'écrit:

$$E dE - c^2 \mathbf{p} d\mathbf{p} = 0$$

Soit aussi:

$$\left(\frac{dE}{d\mathbf{p}}\right) \cdot \frac{E}{\mathbf{p}} = c^2 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{v}_g \mathbf{v}_\varphi = c^2$$

\mathbf{v} étant la vitesse de déplacement de la particule dans le référentiel:

$$E = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} \quad \mathbf{p} = \frac{m \mathbf{v}}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}$$

Et donc:

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{c^2}{\mathbf{v}} \quad \text{et} \quad \mathbf{v}_g = \frac{c^2}{\mathbf{v}_\varphi} = \mathbf{v}$$

La vitesse de groupe apparaît bien comme la vitesse "mécanique" des particules.

V-6 Paquet d'ondes non relativiste

Par définition, l'énergie cinétique E_c d'une particule, surplus d'énergie due à son mouvement, s'écrit:

$$E_c = E - mc^2 = \frac{m c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}} - mc^2$$

Ce qui devient dans la limite $v/c \ll 1$:

$$E_c \approx \frac{1}{2} m v^2$$

Le paquet d'onde peut donc s'écrire aussi:

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \exp\left(-i \frac{m c^2 t}{\hbar}\right) \int A(\mathbf{k}) \exp\left[-i \left(\frac{E_c(\mathbf{k})}{\hbar} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}\right)\right] d\mathbf{k}$$

Le facteur de phase $\exp(-i m_0 c^2 t / \hbar)$ commun à toutes les ondes élémentaires est mis en facteur. Ecrivons

$$\Psi(\mathbf{r},t) = \exp\left(-i \left(\frac{m c^2 t}{\hbar}\right)\right) \psi(\mathbf{r},t)$$

$$\text{où } \psi(\mathbf{r},t) = \int A(\mathbf{k}) \exp - i \left(\frac{E_c(\mathbf{k})}{\hbar} t - \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \right) d\mathbf{k}$$

est un paquet d'ondes ne faisant apparaître que l'énergie cinétique.

Si on écrit l'énergie cinétique $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = p^2/2m$, il devient un paquet d'ondes non relativiste.

Quelles différences voyons nous entre ces deux paquets d'ondes $\Psi(\mathbf{r},t)$ et $\psi(\mathbf{r},t)$?

i) Ils présentent des vitesses de phase tout à fait différentes. Pour le paquet d'ondes relativiste $\mathbf{v}_\varphi = \frac{E(\mathbf{k})}{\hbar \mathbf{k}}$ alors que pour le paquet d'ondes non relativiste: $\mathbf{v}_\varphi = \frac{E_c(\mathbf{k})}{\hbar \mathbf{k}}$.

ii) Ils correspondent aux mêmes densités de probabilité de présence puisque: $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2 = |\psi(\mathbf{r},t)|^2$. Ils doivent donc correspondre aux mêmes vitesses de groupe qui sont les vitesses de propagation du maxima de $|\Psi(\mathbf{r},t)|^2$ et $|\psi(\mathbf{r},t)|^2$

Déterminons les vitesses de phase et de groupe du paquet d'ondes non relativiste:

$$\mathbf{v}_\varphi = \frac{E(\mathbf{k})}{\hbar \mathbf{k}} = \frac{\mathbf{p}^2/2m}{\mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{2m} = \frac{\mathbf{v}}{2}$$

$$\mathbf{v}_g = \frac{d E(\mathbf{k})}{\hbar d \mathbf{k}} = \frac{d (\mathbf{p}^2/2m)}{d \mathbf{p}} = \frac{\mathbf{p}}{m} = \mathbf{v}$$

La vitesse de phase est devenue égale à $v/2$ au lieu de c^2/v .

La vitesse de groupe qui seule présente une signification physique relative à une mesure est restée inchangée.

Si les particules sont non relativistes, les deux paquets d'onde sont équivalents et il est beaucoup plus simple de travailler avec la forme non relativiste $\psi(\mathbf{r},t)$