حـــــســــــاب الـــــــتـــــــكـــــامـــــــل

1)- تعريف: تكامل دالة متصلة:

F **دالة أصلية للدالة** f **على المجال** $[a\ ;\ b]$

$$\int_a^b f(x)dx = [\,f(x)\,]_a^b = F(b) - F(a)$$

2)- خاصيات:

*** $\int_a^a f(x)dx = 0\ ;\ \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$

*** $\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx$

*** $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$

$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda\int_a^b f(t)dt$

*** $a \le b\ ;\ f(x) \ge 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \ge 0$

*** $a \le b\ ;\ f \le g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$

3)- القيمة المتوسطة:

لتكن f **دالة متصلة على مجال** $[a\ ;\ b]$ **بحيث :**

$$f([a;b]) = [m;M]$$

لدينا : $m \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le M$

و $\exists c \in [a;b];\mu = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx = f(c)$

μ **تسمى القيمة المتوسطة للدالة** f **على المجال** $[a\ ;\ b]$

4)- المكاملة بالأجزاء:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

5) المكاملة بتغيير المتغير:

لتكن g **دالة قابلة للاشتقاق على المجال** $[a\ ;\ b]$ **و** g' **متصلة على المجال** $[a\ ;\ b]$ **و** f **دالة متصلة على** $g([a;b])$

$$\begin{cases} x = g(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)dt \\ t = a \Leftrightarrow x = g(a) \\ t = b \Leftrightarrow x = g(b) \end{cases} \qquad \int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

6)- مبرهنة:

لتكن f **دالة متصلة على مجال** I **و ليكن** $a \in I$ **و** $y_0 \in \mathbb{R}$ **.**

*** **الدالة** G **المعرفة على** I **كالآتي:** $G(x) = \int_a^x f(x)dx$

تسمى الدالة الأصلية للدالة f **على** I **التي تنعدم عند** $x_0 = a$ **.**

*** **الدالة** F **المعرفة على** I **كالتالي:** $F(x) = \int_a^x f(x)dx + y_0$

هي الدالة الأصلية للدالة f **التي تأخذ القيمة** y_0 **عند النقطة** $x_0 = a$ **.**

7)-حساب المساحات :

*** **لتكن** f **دالة متصلة على مجال** $[a\ ;\ b]$

وليكن (C_f) **منحنى الدالة** f **في معلم متعامد** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

المساحة الهندسية للحيز المستوي Δ_f **المحصور بين** (C_f) **و محور الأفاصيل و المستقيمين** $x = a$ **و** $x = b$ **هي :**

$$A(\Delta_f) = \int_b^b |f(x)|\,dx \quad (u.a)$$

حيث $u.a$ **هي وحدة قياس المساحات في المعلم المتعامد** $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$

و لدينا: $u.a = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|$

*** **لتكن** f **و** g **دالتان متصلتان على** $[a\ ;\ b]$

المساحة الهندسية للحيز المستوي بين (C_f) **و** (C_g) **و المستقيمين** $x = a$ **و** $x = b$ **هي:**

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|\,dx \quad (ua)$$

*** **تطبيق :**

مساحة قرص شعاعها R **هي :** $S = 2\int_{-R}^{R}\sqrt{R^2 - x^2}\,dx$

$= \pi R^2$

8)- حساب الحجوم:

*** **لتكن** f **دالة متصلة و موجبة على مجال** $[a\ ;\ b]$

حجم المجسم الدوراني المولد بدوران منحنى الدالة f **دورة كاملة حول محور الأفاصيل هو:** $V = \int_a^b \pi(f(x))^2\,dx \quad (u.v)$

حيث $u.v$ **هي وحدة قياس الحجوم:** $u.v = \|\vec{i}\|\times\|\vec{j}\|^2$

***__تطبيق:__** **حجم كرة شعاعها** R

$$V = \int_{-R}^{R}\pi\left(\sqrt{R^2 - x^2}\right)^2 dx = \frac{4}{3}\pi R^3 (uv)$$