



حساب التفاضل

(1)- تعريف: تكامل دالة متصلة:

F دالة أصلية للدالة f على المجال $[a ; b]$

$$\int_a^b f(x)dx = [f(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(2)- خاصيات:

$$\int_a^a f(x)dx = 0 ; \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx \quad ***$$

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx = \int_a^c f(x)dx \quad ***$$

$$\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt \quad ***$$

$$\int_a^b \lambda f(t)dt = \lambda \int_a^b f(t)dt$$

$$a \leq b ; f(x) \geq 0 \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0 \quad ***$$

$$a \leq b ; f \leq g \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx \quad ***$$

(3)- القيمة المتوسطة:

لتكن f دالة متصلة على مجال $[a ; b]$ بحيث :

$$f([a;b]) = [m;M]$$

$$\text{لدينا : } m \leq \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx \leq M$$

$$\text{و } \exists c \in [a;b]; \mu = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx = f(c)$$

μ تسمى القيمة المتوسطة للدالة f على المجال $[a ; b]$

(4)- المكاملة بالأجزاء:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = [u(x)v(x)]_a^b - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

(5) المكاملة بتغيير المتغير:

لتكن g دالة قابلة للاشتقاق على المجال $[a ; b]$ و g' متصلة على

المجال $[a ; b]$ و f دالة متصلة على $g([a;b])$

$$\begin{cases} x = g(t) \Leftrightarrow dx = g'(t)dt \\ t = a \Leftrightarrow x = g(a) \\ t = b \Leftrightarrow x = g(b) \end{cases} \quad \int_a^b f(g(t))g'(t)dt = \int_{g(a)}^{g(b)} f(x)dx$$

(6)- ميرهنه:

لتكن f دالة متصلة على مجال I و ليكن $a \in I$ و $y_0 \in \mathbb{R}$

$$G(x) = \int_a^x f(x)dx \quad \text{*** الدالة } G \text{ المعرفة على } I \text{ كالآتي:}$$

تسمى الدالة الأصلية للدالة f على I التي تنعدم عند $x_0 = a$

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx + y_0 \quad \text{*** الدالة } F \text{ المعرفة على } I \text{ كالتالي:}$$

هي الدالة الأصلية للدالة f التي تأخذ القيمة y_0 عند النقطة $x_0 = a$

(7)- حساب المساحات:

*** لتكن f دالة متصلة على مجال $[a ; b]$

وليكن (C_f) منحنى الدالة f في معلم متعامد $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

المساحة الهندسية للحيز المستوي Δ_f المحصور بين (C_f) و

محور الأفاصل و المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي :

$$A(\Delta_f) = \int_a^b |f(x)|dx \quad (u.a)$$

حيث $u.a$ هي وحدة قياس المساحات في المعلم المتعامد $(O ; \vec{i} ; \vec{j})$

$$u.a = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\| \quad \text{و لدينا:}$$

*** لتكن f و g دالتان متصلتان على $[a ; b]$

المساحة الهندسية للحيز المستوي بين (C_f) و (C_g) و

المستقيمين $x = a$ و $x = b$ هي:

$$S = \int_a^b |f(x) - g(x)|dx \quad (ua)$$

*** تطبيق:

$$S = 2 \int_{-R}^R \sqrt{R^2 - x^2} dx \quad \text{مساحة قرص شعاعها } R \text{ هي:}$$

$$= \pi R^2$$

(8)- حساب الحجوم:

*** لتكن f دالة متصلة و موجبة على مجال $[a ; b]$

حجم المجسم الدوراني المولد بدوران منحنى الدالة f دورة كاملة

$$V = \int_a^b \pi (f(x))^2 dx \quad (u.v) \quad \text{حول محور الأفاصل هو:}$$

حيث $u.v$ هي وحدة قياس الحجوم: $u.v = \|\vec{i}\| \times \|\vec{j}\|^2$

*** تطبيق: حجم كرة شعاعها R

$$V = \int_{-R}^R \pi (\sqrt{R^2 - x^2})^2 dx = \frac{4}{3} \pi R^3 (uv)$$