TES3 *L'usage de la calculatrice est autorisé* Durée : 3h

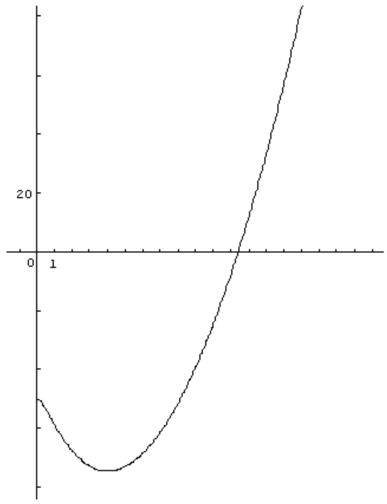
Exercice 1: (4 *points*) **QCM** ***Commun à tous les candidats***

Notation : *Pour chacune des questions suivantes numérotées de 1 à 8, trois affirmations sont proposées ;* ***au moins une est vraie****.* ***On demande de cocher les cases si le résultat proposé est vrai,*** *aucune justification n'est demandée.*
Un demi point est affecté à chaque case correspondant à une propriété vraie. Une réponse correcte rapporte le nombre de points ; une réponse incorrecte enlève la moitié du nombre de points ; aucune réponse ne rapporte aucun point et n'en enlève aucun. Si le total est négatif, la note est ramenée à zéro.

<table>
<tr><td>Question 1 : Soit f la fonction définie sur]0 ;+∞[par : $f(x) = 2\ln x - 3x + 5$.
Dans un repère, une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 est :</td><td>$y = -x + 1$ ☐
$y = 2x - 3$ ☐
$y = -x + 3$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 2 : On considère une fonction g dont le tableau de variation est donné ci-dessous.
On pose $h = \ln \circ g$.
<table><tr><td>x</td><td>5</td><td>7</td></tr><tr><td>Variation de g</td><td>-3</td><td>↗ 1</td></tr></table></td><td>h n'est pas définie sur [5 ;7] ☐
h est strictement décroissante sur [5 ;7] ☐
h est strictement croissante sur [5 ;7] ☐</td></tr>
<tr><td>Question 3 :
L'ensemble des solutions de l'inéquation
$x\ln(0,3) - 1 \leq 0$ est :</td><td>$\left]-\infty ; \frac{1}{\ln(0,3)}\right]$ ☐
$\left[\frac{1}{\ln(0,3)} ; +\infty\right[$ ☐
$\left]0 ; \frac{1}{\ln(0,3)}\right]$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 4 : u est la fonction définie sur ℝ par :
$u(x) = \frac{x+1}{x^2+2x+3}$.
Une primitive U de u sur ℝ est définie par :</td><td>$U(x) = \ln(x^2 + 2x + 3)$ ☐
$U(x) = 2\ln(x^2 + 2x + 3)$ ☐
$U(x) = \frac{1}{2}\ln(x^2 + 2x + 3)+4$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 5 :
Une autre écriture de e^{4+2x} est :</td><td>$(e^2)^2 \times \frac{1}{e^{2x}}$ ☐
$(e^{x+2})^2$ ☐
$e^4 + e^{2x}$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 6 :
Si $f(x) = e^{-x} + \ln x$, alors</td><td>$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ ☐
$\lim_{x \to 0} f(x) = 1$ ☐
$\lim_{x \to 1} f(x) = 2e$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 7 :
L'inéquation $e^{-3x+1} < e^{-2x+3}$ admet comme ensemble de solution</td><td>$]-\infty ; -2[$ ☐
$[-2 ; +\infty[$ ☐
$[e^{-2} ; +\infty[$ ☐</td></tr>
<tr><td>Question 8 :
Si 0<a<b alors</td><td>$\frac{e^a}{e^b} < 1$ ☐
$e^{-a} < e^{-b}$ ☐
$e^{\frac{a}{b}} < 1$ ☐</td></tr>
</table>

Exercice 2: (2 *points*) **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit f une fonction définie sur $[0;50]$ par :
$f(x) = x^2 + \dfrac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1) - 50$.
La courbe représentant f est donnée ci-contre :
Soit α un nombre réel de l'intervalle $]11;12[$.
On admet que $f(x) < 0$ pour $x \in [0;\alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;50]$.
Pour l'exercice, on prendra $\alpha = 11$.



Une entreprise fabrique une quantité x, exprimée en kilogrammes, d'un certain produit. Le coût marginal C, exprimé en euros est défini sur $[0;50]$ par : $C(x) = 2x + \dfrac{50}{x+1}$.

La fonction coût total, notée C_T, est la primitive de la fonction C sur $[0;50]$ qui prend la valeur 50 pour $x = 0$.

Vérifier que $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$.

Exercice 3: (5 *points*)

Une entreprise peint des jouets. Pour cela, elle utilise deux machines M_1 et M_2. La machine M_1 peint un quart de la production. On sait que la machine M_1 peint correctement un jouet avec une probabilité de 0,85 alors que la machine M_2, plus récente, le fait avec une probabilité de 0,95. Tous les jouets sont mélangés puis acheminés ensemble vers l'unité d'emballage. On choisit alors un jouet au hasard, tous les choix étant équiprobables.

On note : A_1 l'événement : « le jouet est peint par M_1 »
A_2 l'événement : « le jouet est peint par M_2 »
B l'événement : « le jouet est peint correctement ».

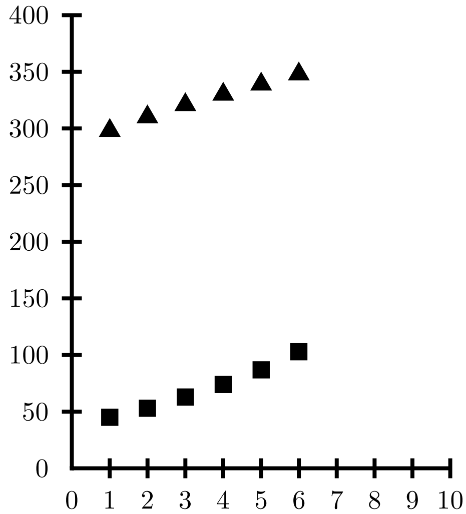
1. (a) Représenter par un arbre pondéré la situation décrite.
   (b) Définir par une phrase l'événement $A_1 \cap B$.
   (c) Calculer la probabilité de l'événement $A_1 \cap B$.
   (d) Montrer que la probabilité de l'événement B, notée p, est égale à 0,925.
   (e) Le jouet choisi est peint correctement.
   Quelle est la probabilité pour qu'il ait été peint par la machine M_1 ?
2. *Dans cette question, on donnera les résultats arrondis à 10^{-2} près.*
   On choisit maintenant au hasard et de façon indépendante 4 jouets.
   (a) Quelle est la probabilité pour que les 4 jouets soient peints correctement ?
   (b) Quelle est la probabilité pour qu'un jouet au moins ne soit pas peint correctement ?

Exercice4: $(5\ points)$

Une banque propose à ses clients de s'abonner au service « bank.net » qui permet de consulter son compte et d'effectuer des transactions via une connexion internet.
Le tableau ci-dessous donne l'évolution du nombre de clients de la banque et du nombre de clients abonnés à « bank.net » de l'année 2001 à l'année 2006.
y_i est le nombre de milliers de clients de la banque au 1^er^ janvier de l'année de rang x_i,
q_i est le nombre de milliers de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^er^ janvier de l'année de rang x_i.

Année	2001	2002	2003	2004	2005	2006
Rang de l'année : x_i	1	2	3	4	5	6
Nombre de clients : y_i (en milliers)	298	310	321	330	339	348
Nombre d'abonnés à « bank.net » : q_i (en milliers)	45	53	63	74	87	103

Les séries statistiques $(x_i\ ;\ y_i)$ et $(x_i\ ;\ q_i)$ sont représentées sur la figure ci-dessous :



1. (a) Calculer le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^er^ janvier de l'année 2001 (donner le résultat arrondi à l'unité).
   (b) Calculer le taux d'accroissement du nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » entre le 1^er^ janvier 2001 et le 1^er^ janvier 2006 (ce taux sera exprimé en pourcentage et arrondi à l'unité).
2. Modélisation de l'évolution du nombre de clients de la banque par un ajustement affine.
   (a) Donner, à l'aide de la calculatrice, l'équation de la droite d'ajustement de y en x obtenue par la méthode des moindres carrés. Le coefficient directeur sera arrondi au dixième et l'ordonnée à l'origine sera arrondie à l'unité.
   (b) En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients de la banque au premier janvier 2010.
3. La forme du nuage de points de coordonnées $(x_i\ ;\ q_i)$ permet d'envisager un ajustement exponentiel.
   En effectuant le changement de variable $z_i = \ln(q_i)$, on obtient la droite d'ajustement de z en x par la méthode des moindres carrés d'équation
   $z = 0,165x + 3,642$.
   (a) En déduire une expression de q en fonction de x de la forme $q = kA^x$ et donner les valeurs approchées arrondies au centième des constantes k et A.
   (b) On admet que l'évolution du nombre de clients abonnés à « bank.net » entre les années 2001 et 2006 peut être modélisée par la relation
   $q = 38,17 \times (1,18)^x$. En supposant que l'évolution se poursuive selon ce modèle, donner une estimation du nombre de clients abonnés à « bank.net » au 1^er^ janvier 2010.
   (c) Quel serait, selon l'estimation obtenue à la question 2. b. et l'estimation précédente, le pourcentage de clients de la banque abonnés à « bank.net » au 1^er^ janvier 2010 ?
4. On suppose que, jusqu'au 1^er^ janvier 2016, le nombre de clients de la banque évolue selon le modèle obtenu à la question 2. a. et le nombre de clients de la banque abonnés à « bank.net » évolue selon le modèle donné à la question 3.b.
   À l'aide de ces deux modèles, quelles prévisions obtient-on pour 2016 ?
   Qu'en pensez-vous ?

<u>Exercice 4:</u> (4 *points*)

*Le but de l'exercice est l'étude d'une fonction et le tracé de sa courbe représentative (**Partie B**), en s'appuyant sur l'étude du signe d'une fonction auxiliaire (**Partie A**).*

Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln x}{x^2}$.

Certains renseignements concernant la fonction f sont consignés dans le tableau suivant :

x	1		$e^{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$	$-\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$f\left(e^{\frac{3}{2}}\right)$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$

1. (a) Montrer que, pour x élément de l'intervalle $[1;+\infty[$, on a : $f'(x)=\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$ où f' désigne la dérivée de f.

   (b) Étudier le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x, et retrouver les variations de f données dans le tableau (aucun calcul de limite n'est demandé).

2. Montrer que l'équation $f(x)=0$ admet une solution unique α dans l'intervalle $[1;e]$.
3. En utilisant les résultats précédents et le tableau de variation de f, donner le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{\ln x}{x}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan rapporté à un repère orthonormal.

1. (a) Déterminer la limite de g en $+\infty$. (On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$.)

   (b) Montrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\left[g(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=0$.

   Interpréter ce résultat pour la droite D d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ et la courbe $\mathcal{C}$.

   (c) Étudier la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à la droite D.

FACULTATIF (2 *points*)

2. Montrer que la fonction f étudiée dans la **partie A** est la fonction dérivée de g.
   En déduire le sens de variation de g.
3. Soit M le point de $\mathcal{C}$ d'abscisse e, et T la tangente à $\mathcal{C}$ en M. Justifier que T est parallèle à D.

Correction du Bac Blanc

Exercice 1:

1. (a) Par lecture graphique : $f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e}$

   $f'(1)$ est le coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse 1. Donc $f'(1) = 2$.

   (b) tableau de signes de f :

x	0		1		3
signe de $f(x)$		$-$	0	$+$	

2. $f(x) = (ax+b)\ln x$

   (a) $f(x) = u(x)v(x)$ où $u(x) = ax+b$; $u'(x) = a$

   $v(x) = \ln x$; $v'(x) = \frac{1}{x}$

   $f' = u'v + uv'$ d'où $f'(x) = a\ln x + (ax+b)\times\frac{1}{x} = a\ln x + \frac{ax+b}{x}$

   (b) On a $\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = -\frac{2}{e} \\ f'(1) = 2 \end{cases}$ et $\begin{cases} f\left(\frac{1}{e}\right) = \left(a\times\frac{1}{e}+b\right)\ln\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\frac{a}{e}+b\right)\times(-1) = -\frac{a}{e}-b \\ f'(1) = a\ln 1 + \frac{a\times 1+b}{1} = a+b \end{cases}$

   On a alors : $\begin{cases} -\frac{a}{e} - b = -\frac{2}{e} \\ a+b = 2 \end{cases}$ d'où $\begin{cases} -a-be = -2 \\ a+b=2 \end{cases}$

   et on obtient : $-be+b = 0$ c'est à dire $b = 0$ et $a = -b+2 = 2$

   Donc $f(x) = 2x\ln x$.

3. On sait que $f(x) > 0$ sur $]1;3]$, donc en particulier sur $]1;2]$, donc les primitives de f sont strictement croissantes sur $]1;2[$, ce qui exclut les courbes 1 et 3.

   Donc c'est la courbe 2 qui représente une primitive de f.

Exercice 2: **Candidats n'ayant pas suivi l'enseignement de spécialité**

Soit f une fonction définie sur $[0;50]$ par : $f(x) = x^2 + \frac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1) + 50$.

$f(x) < 0$ pour $x \in [0;\alpha[$ et $f(x) > 0$ pour $x \in]\alpha;50]$. On prend $\alpha = 11$.

PARTIE A

Le coût marginal C est défini sur $[0;50]$ par : $C(x) = 2x + \frac{50}{x+1}$.

1. Montrons que $C_T'(x) = C(x)$ et $C_T(0) = 50$

   $C_T(x) = x^2 + 50\ln(u(x)) + 50$ où $u(x) = x+1$; $u'(x) = 1$

   $C_T'(x) = 2x + 50\times\frac{u'(x)}{u(x)} = 2x + \frac{50}{x+1} = C(x)$

   de plus $C_T(0) = 0^2 + 50\ln(0+1) + 50 = 50$, donc on a bien $C_T(x) = x^2 + 50\ln(x+1) + 50$ comme fonction coût total.

2. $C_m(x) = \frac{C_T(x)}{x}$ pour $x \in]0;50]$.

   (a) $C_m(x) = \frac{x^2 + 20\ln(x+1) + 50}{x} = x + 50\frac{\ln(x+1)}{x} + \frac{50}{x}$

   (b) $C_m(x) = x + 50\times\frac{1}{x} + 50\times\frac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x) = \ln(x+1)$; $u'(x) = \frac{1}{x+1}$

   $v(x) = x$; $v'(x) = 1$

   $C_m'(x) = 1 + 50\times\left(-\frac{1}{x^2}\right) + 50\times\frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{(v(x))^2}$

   $C_m'(x) = 1 - \frac{50}{x^2} + 50\times\frac{\frac{1}{x+1}\times x - \ln(x+1)\times 1}{x^2} = \frac{x^2 - 50 + \frac{50x}{x+1} - 50\ln(x+1)}{x^2} = \frac{f(x)}{x^2}$

PARTIE B

1. $C'_m(x)$ est alors du signe de $f(x)$ car $x^2 > 0$ sur $]0;50]$,
   d'où $C'_m(x) > 0$ sur $]\alpha;50]$ et $C'_m(x) < 0$ sur $]0;\alpha[$.
   Tableau de variation de C_m :

x	0		α		50
$C'_m(x)$	||	$-$	0	$+$	
C_m	||	$\searrow$	$C_m(\alpha)$	$\nearrow$	

2. Le coût moyen minimal est atteint pour $x = \alpha$,
   c'est à dire pour environ pour une production de 11 kg.
   $C_T(11) = 11^2 + 50\ln(11+1) + 50 = 171 + 50\ln 12 \simeq 295$.
   $C(11) = 2 \times 11 + \dfrac{50}{11+1} = 22 + \dfrac{50}{12} \simeq 26$.
   Pour un coût moyen minimal, on a un coût total d'environ 295€ et un coût marginal d'environ 26€.

Exercice 2: Candidats ayant suivi l'enseignement de spécialité

1. (a) Il existe une chaîne eulérienne car il n'y a que deux sommets d'ordre impair : A et D.
   Comme le guide part du sommet A, il pourra emprunter tous les tronçons de route en passant une et une seule fois sur chacun d'eux.
   (b) Non, car il n'existe pas de cycle eulérien car les sommets ne sont pas tous d'ordre pair.

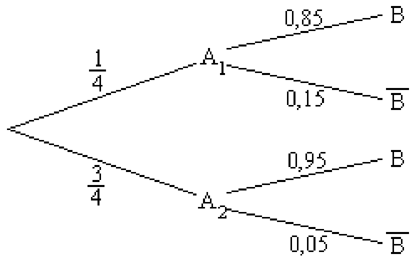
2.

	B	C	D	F	G	E
A	12(A)	20(A)	9(A)			
D		17(D)		30(D)		
B					25(B)	
C				28(C)	24 (C)	
G				29(G)		33(G)
F						31(F)

   La plus courte chaîne est alors ADCFE de poids 31. Le plus court chemin de A à E est donc de 31 km.

Exercice 3:

1. (a) on a $P(A_1) = \dfrac{1}{4}$; $P(A_2) = \dfrac{3}{4}$; $P_{A_1}(B) = 0,85$ et $P_{A_2}(B) = 0,95$
   arbre pondéré :



   (b) $A_1 \cap B$ est l'événement : « le jouet a été peint par la machine M_1 et il a été correctement peint ».
   (c) $P(A_1 \cap B) = P_{A_1}(B) \times P(A_1) = 0,85 \times \dfrac{1}{4} = 0,2125$
   (d) $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2)$ d'après la formule des probabilités totales
   $= 0,2125 + P_{A_2}(B) \times P(A_2) = 0,2125 + 0,95 \times \dfrac{3}{4} = 0,925.$
   (e) On cherche $P_B(A_1)$
   $P_B(A_1) = \dfrac{P(A_1 \cap B)}{P(B)} = \dfrac{0,2125}{0,925} \simeq 0,23$

2. On choisit au hasard et de façon indépendante quatre jouets. On est alors en présence d'un schéma de Bernoulli.

   (a) Soit X le nombre de jouets peints correctement. On cherche alors $P(X=4)$.
   $P(X=4)=(P(B))^4=(0,925)^4 \simeq 0,73$

   (b) On cherche $P(X \leq 3)$
   $P(X \leq 3)=1-P(X=4) \simeq 0,27$

Exercice 4:

PARTIE A

Soit f la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln x}{x^2}$.

1. (a) Pour $x \in [1;+\infty[$,
   $f(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=-1+\ln x$; $u'(x)=\dfrac{1}{x}$
   $v(x)=x^2$; $v'(x)=2x$
   $f'=\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$
   $f'(x)=\dfrac{\frac{1}{x}\times x^2-2x(-1+\ln x)}{(x^2)^2}=\dfrac{x-2x(-1+\ln x)}{x^4}=\dfrac{1+2-2\ln x}{x^3}=\dfrac{3-2\ln x}{x^3}$

   (b) $x^3>0$ sur $[1;+\infty[$, donc $f'(x)$ est du signe de $3-2\ln x$
   $3-2\ln x>0$ nous donne $\ln x<\dfrac{3}{2}$ d'où $x<e^{\frac{3}{2}}$
   donc $f'(x)>0$ sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et $f'(x)>0$ sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$
   donc f est bien strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$ et strictement décroissante sur $]e^{\frac{3}{2}};+\infty[$.

2. $e \in [1;e^{\frac{3}{2}}[$, f est continue sur $[1;+\infty[$, de plus f est strictement croissante sur $[1;e^{\frac{3}{2}}[$
   $f(1)=-\dfrac{1}{2}$ et $f(e)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln e}{e^2}=\dfrac{1}{2}>0$
   donc l'équation $f(x)=0$ admet une unique solution α sur $]1;e[$.

3. On a $f(x)<0$ sur $]1;e[$, $f(x)>0$ sur $]e;+\infty[$ et $f(x)=0$ pour $x=e$.

PARTIE B

Soit g la fonction définie sur $[1;+\infty[$ par : $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{\ln x}{x}$.

1. (a) $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{2}x+1=+\infty$ et $\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\ln x}{x}=0$ donc $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=+\infty$.

   (b) $g(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)=-\dfrac{\ln x}{x}$ et $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x}=0$
   d'où $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=0$ et la droite d'équation $y=\dfrac{1}{2}x+1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

   (c) $x>0$ sur $[1;+\infty[$ et $-\ln x>0$ donne $\ln x<0$ d'où $0<x<1$
   mais $x \in [1;+\infty[$, donc pour tout $x \in]1;+\infty[$, $-\ln x<0$, ce qui donne $g(x)-\left(\dfrac{1}{2}x+1\right)<0$
   Donc la courbe $\mathcal{C}$ est en-dessous de D sur $]1;+\infty[$.

2. $g(x)=\dfrac{1}{2}x+1-\dfrac{u(x)}{v(x)}$ où $u(x)=\ln x$; $u'(x)=\dfrac{1}{x}$
   $v(x)=x$; $v'(x)=1$
   $g'=\dfrac{1}{2}-\dfrac{u'v-uv'}{v^2}$ d'où $g'(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{\frac{1}{x}\times x-\ln x\times 1}{x^2}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1-\ln x}{x^2}=\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\ln x}{x^2}=f(x)$

3. Le coefficient directeur de T est égal à $g'(e)=f(e)$ or $f(e)=\dfrac{1}{2}$
   Donc T et D ont le même coefficient directeur, elles sont donc parallèles.