Fiche méthodes sur les primitives

Comment montrer que F est une primitive de f :

> Il faut en dérivant F retrouver f :
> ***F ' (x) = f (x)***

Comment trouver une primitive quelconque d'une fonction f :

Trois formes d'écriture sont à rechercher plus précisément , avec deux autres que l'on pourra consulter dans un complément de ce document .
Dans le tableau qui suit : $n \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{R}$.

f		F
$f = k.\,u'.\,u^n$		$F = k.\dfrac{u^{n+1}}{n+1}$
$f = k.\dfrac{u'}{u^n} \quad (n \neq 1)$	**a pour primitive :**	$F = k.\dfrac{-1}{(n-1)u^{n-1}}$
$f = k.\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$		$F = 2k.\sqrt{u}$

Exemples d'application : (sans préciser les intervalles d'étude)

ex 1 : $f(x) = (3x+5)^4$

$$= \frac{1}{3} \times 3(3x+5)^4$$

> étant donné qu'il y a une puissance u^n
> on doit, si c'est possible, faire apparaître u'
> si on veut appliquer
> une des formules du tableau

f étant de la forme : $f = \dfrac{1}{3}.u'.\,u^n$ avec $u(x) = 3x+5$, $u'(x) = 3$ et $n = 4$

Ses primitives sont de la forme : $F = \dfrac{1}{3}.\dfrac{u^{n+1}}{n+1} + k$, $k \in \mathbb{R}$

On a donc : $F(x) = \dfrac{1}{15}(3x+5)^5 + k$

ex 2 : $f(x)=\dfrac{10}{(5x-3)^3}=2\times\dfrac{5}{(5x-3)^3}$

On a pu écrire f sous la forme $f=2.\dfrac{u'}{u^n}$
avec $u(x)=5x-3$ $u'(x)=5$ et $n=3$

On en déduit que : $F=2.\dfrac{-1}{(n-1).u^{n-1}}+k=-\dfrac{1}{u^2}+k$, $k\in\mathbb{R}$

On a donc : $F(x)=-\dfrac{1}{(5x-3)^2}+k$

ex 3 : $f(x)=\dfrac{x^3}{\sqrt{x^4+1}}=\dfrac{1}{4}.\dfrac{4x^3}{\sqrt{x^4+1}}$

On a pu écrire f sous la forme $f=\dfrac{1}{4}.\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$
avec $u(x)=x^4+1$ et $u'(x)=4x^3$

On en déduit que : $F=\dfrac{1}{4}.\left(2\sqrt{u}\right)+k$, $k\in\mathbb{R}$

Se référer au tableau pour trouver la primitive F qui correspond à f

On a donc : $F(x)=\dfrac{1}{2}\sqrt{x^4+1}+k$

Comment trouver une primitive particulière d'une fonction f :

Les primitives F de f étant définies à une constante réelle k , on pourra préciser cette constante grâce à une condition initiale du type $F(x_0)=y_0$.

Exemple : Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2x+1)(x^2+x+1)$
Déterminer F la primitive de f sur $\mathbb{R}$ qui vérifie $F(1)=0$.

f étant de la forme : $f=u'.u$, ses primitives sont de la forme $F=\dfrac{u^2}{2}+k$,

Donc on a : $F(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^2+k$, $k\in\mathbb{R}$

Or $F(1)=0 \Leftrightarrow \dfrac{9}{2}+k=0 \Leftrightarrow k=-\dfrac{9}{2}$

Par conséquent : $F(x)=\dfrac{1}{2}(x^2+x+1)^2-\dfrac{9}{2}$

Attention : F définie par $F(x)=(x^2+x)\left(\dfrac{x^3}{3}+x^2+x\right)$ n'est pas une primitive de f