

1 Homothétie de centre O et de rapport k

Définition :

L'**homothétie** de centre O et de rapport k ($k \in \mathbb{R}^*$) est une application du plan dans lui même qui, à tout point M , associe le point M' tel que :

$$\overrightarrow{OM'} = k \cdot \overrightarrow{OM}$$

On note : $M' = h_{(O;k)}(M)$

Exemples :

1. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 3 :



2. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -3 :



3. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport 1 :



4. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport -1 :



5. Construire A' l'image de A par l'homothétie de centre O et de rapport $\frac{5}{2}$:



2 Quelques propriétés

Propriété 1 :

Si $M' = h_{(O;k)}(M)$ alors M, M' et O sont

Démonstration :

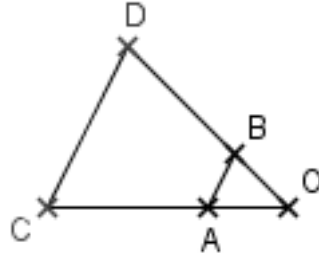
$\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$ donc

\vec{OM} et \vec{OM}' sont

Propriété 2 :

Si $A' = h_{(O;k)}(A)$ et $B' = h_{(O;k)}(B)$ alors

$$\vec{A'B'} = \dots\dots\dots$$



Démonstration :

$$\vec{A'B'} = \vec{OB'} - \vec{OA'} = \dots\dots\dots$$

donc $\vec{A'B'} = \dots\dots\dots$

Propriété 3 :

Les points invariants de $h_{(O;k)}$ sont :

Si $k = 1, \dots\dots\dots$

Si $k \neq 1, \dots\dots\dots$

Démonstration :

M est invariant si $\vec{OM} = k \cdot \vec{OM}$ donc $\dots\dots\dots \vec{OM} = \vec{0}$

donc $\dots\dots\dots$ ou $\dots\dots\dots$

Propriété 4 :

L'application réciproque de $h_{(O;k)}$ est : $\dots\dots\dots$

$$\text{donc } h_{(O;k)}^{-1} = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

On a $\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$ donc $\vec{OM} = \dots\dots\dots$

Propriété 5 :

La composée de deux homothéties $h_{(O;k)}$ et $h_{(O;k')}$ est :

$$h_{(O;k)} \circ h_{(O;k')} = \dots\dots\dots$$

Démonstration :

Si $\vec{OM}' = k \cdot \vec{OM}$ et $\vec{OM}'' = k' \cdot \vec{OM}'$ alors :

$$\vec{OM}'' = k' \cdot (\dots\dots\dots) = \dots\dots\dots \vec{OM}$$