

Exercice 1

$[AB]$ est un segment de longueur donnée L .

On désigne par Γ l'ensemble des points M du plan tels que $\|2\vec{MA} - \vec{MB}\| = L$
et par O le symétrique du point B par rapport à A .

Montrer que Γ est le cercle de centre O et de rayon L , puis tracer cet ensemble.

Exercice 2

On considère deux points A et B tels que $AB = 6$.

On désigne par I le milieu de $[AB]$.

1. Exprimer $\vec{MA} \cdot \vec{MB}$ en fonction de IM^2 .
2. En déduire alors l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant $\vec{MA} \cdot \vec{MB} = 7$. Construire E_1 .
3. Exprimer $MA^2 + MB^2$ en fonction de IM^2 .
4. En déduire alors l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant $MA^2 + MB^2 = 26$. Construire E_2 .

Exercice 3

Soit A , B et C trois points non alignés.

1. M étant un point quelconque du plan, montrer que le vecteur

$$\vec{u}(M) = \vec{MA} + \vec{MB} - 2\vec{MC}$$

est un vecteur constant.

2. En déduire alors que $\vec{CA} + \vec{CB} = \vec{AB} - 2\vec{AC} = \vec{BA} - 2\vec{BC}$

Exercice 4

On considère deux points A et B tels que $AB=8$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A,5) et (B,3)
2. Construire H barycentre des points pondérés (A,11) et (B,-3)
3. M étant un point du plan justifier que les vecteurs $\vec{u} = 5\vec{MA} + 3\vec{MB}$ et $\vec{v} = 11\vec{MA} - 3\vec{MB}$ sont colinéaires à \vec{MG} et \vec{MH} .
4. Déterminer l'ensemble E_1 des points M du plan vérifiant

$$\|5\vec{MA} + 3\vec{MB}\| = \|11\vec{MA} - 3\vec{MB}\|.$$

Construire E_1 .

La question 5. ne peut pas être traitée pour l'instant...

5. Déterminer l'ensemble E_2 des points M du plan vérifiant $(5\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot (11\vec{MA} - 3\vec{MB}) = 0$

Exercice 5

A, B et C sont trois points non alignés de E et G est le centre de gravité du triangle ABC.

Pour tout point M du plan, on pose

$$\vec{V} = 2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}$$

1. Montrer que pour tout point M du plan, \vec{V} est un vecteur indépendant du point M.
2. Montrer que l'ensemble des points M de E tel que:

$$\|\vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC}\| = \|2\vec{MA} - \vec{MB} - \vec{MC}\|$$

est un cercle de centre G dont on précisera le rayon et que l'on construira.

Exercice 6

1. Construire H barycentre des points pondérés (A,1) et (B,3).
2. Construire G barycentre des points pondérés (H,4) et (C,5).
3. Justifier que $\vec{GA} + 3\vec{GB}$ est colinéaire à \vec{GH} . En déduire alors que

$$\vec{GA} + 3\vec{GB} + 5\vec{GC} = \vec{0}.$$

4. Soit K le barycentre des points pondérés (A,1) et (C,5). Montrer alors que G est le barycentre des points pondérés (B,3) et (K,6).

Exercice 7

Soit trois points A, B et C non alignés. On désigne par G le barycentre des points pondérés (A,3), (B,4) et (C,2).

1. Soit H le point tel que $\vec{BH} = \frac{1}{3}\vec{BC}$. Déterminer deux nombres b et c tels que H soit le barycentre de (B,b) et (C,c).
2. Montrer alors que les points A, G et H sont alignés. Construire alors G.
3. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in P \mid \vec{u} = 3\vec{MA} + 2\vec{MB} + 4\vec{MC} \text{ soit colinéaire à } \vec{AB} \right\}$. Construire E.

Exercice 8

Soit ABCD un rectangle tel que $AB = 5$ et $BC = 9$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A;1), (B;1), (C;1) et (D;2)

Faire un dessin précis et expliquer la méthode utilisée

2. Soit I le milieu de [BC] et K le point vérifiant $\vec{AK} = \frac{2}{3}\vec{AD}$

Montrer que les points I, J et K sont alignés.

3. Déterminer et construire l'ensemble E des points M du plan tels que $\vec{u} = \vec{MA} + \vec{MB} + \vec{MC} + 2\vec{MD}$ soit colinéaire à \vec{BC} .

Exercice 9

Soit trois points A, B et C non alignés. On désigne par I le barycentre

des points pondérés (B,2) et (C,1), par J et K les points définis par $\vec{CJ} = \frac{3}{4}\vec{CA}$

et $\vec{AK} = \frac{2}{5}\vec{AB}$. Faire un dessin.

1. Exprimer J et K comme barycentres de deux points choisis parmi A, B, C et affétés de coefficients à préciser.
2. Démontrer alors que les droites (AI), (BJ) et (CK) sont concourantes.

Exercice 9

ABCD est un carré de centre O et de côté 4cm.

Pour tout point M du plan, on pose :

$$\vec{V} = \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD}$$

G est le barycentre des points pondérés $\{(B,1);(C,-4);(D,1)\}$

1. Le système $\{(A,-1);(B,1);(C,1);(D,-1)\}$ admet-il un barycentre ?
2. En déduire que pour tout point M du plan: $\vec{V} = 2\vec{AB}$.
3. Montrer que G est symétrique de O par rapport à C.
4. Construire l'ensemble des points M du plan tels que :

$$\left\| \vec{MB} - 4\vec{MC} + \vec{MD} \right\| = \left\| \vec{MB} - \vec{MA} + \vec{MC} - \vec{MD} \right\|$$

Exercice 10

Soit ABCD un rectangle tel que $AB=6$ et $BC=10$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A,1), (B,2), (C,3) et (D,6)
2. Déterminer l'ensemble $E = \left\{ M \in \text{plan} \mid \left\| \vec{MA} + 2\vec{MB} + 3\vec{MC} + 6\vec{MD} \right\| = 3 \right\}$.

Construire E.

Exercice 11

Soit A, B et C trois points du plan non alignés

1. Construire G barycentre des points (A,1), (B,1) et (C,2).
2. Déterminer $E = \left\{ M \in P \mid \left\| \vec{MA} + \vec{MB} + 2\vec{MC} - \vec{AB} \right\| \right\}$. Construire E_1 .
3. Soit H tel que $\vec{AH} = \frac{2}{3}\vec{AC}$. Montrer que les points B, G et H sont alignés.
4. Soit K tel que $\vec{BK} = \frac{2}{3}\vec{BC}$. J étant le milieu de [AB], montrer que les droites (CI), (BH) et (AK) sont concourantes.

Exercice 12

A, B et C sont trois points non alignés de E.

Soit les deux systèmes de points pondérés: $S_1 = \{(A, -2); (B, 1)\}$ et $S_2 = \{(A, 3); (C, 1)\}$

1. Ces deux systèmes admettent-ils des barycentres?

Si oui les construire; on les notera respectivement G_1 et G_2 .

2. Soit G l'isobarycentre des points A, B et C.

Montrer que G est le barycentre de $(G_1, -1)$ et $(G_2, 4)$.

3. En déduire la position relative des trois points G, G_1 et G_2 .

Exercice 13

Soit A et B deux points tels que $AB = 5$

1. Construire G barycentre des points pondérés (A;2) et (B;3)

2. Construire G' barycentre des points pondérés (A;-1) et (B;6)

3. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_1 = \left(M \in \text{plan} \mid \left\| 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = 10 \right)$$

4. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_2 = \left(M \in \text{plan} \mid \left\| 2\vec{MA} + 3\vec{MB} \right\| = \left\| -\vec{MA} + 6\vec{MB} \right\| \right)$$

5. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_3 = \left(M \in \text{plan} \mid (2\vec{MA} + 3\vec{MB}) \cdot (-\vec{MA} + 6\vec{MB}) = 0 \right)$$

6. Déterminer et construire l'ensemble

$$E_4 = \left(M \in \text{plan} \mid \vec{AM} \cdot \vec{AB} = -10 \right)$$