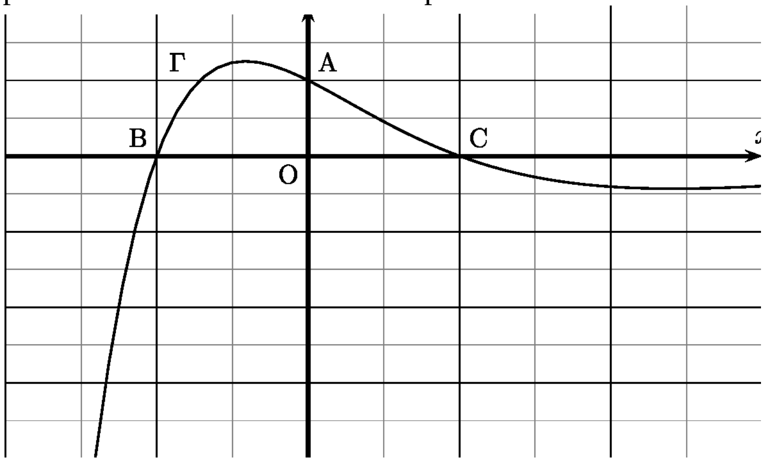
Problème

La courbe Γ ci-dessous est la représentation partielle donnée par la calculatrice de la fonction définie pour tout x élément de ℝ par : $f(x) = (1 - x^2)e^{-x}$ dans un repère orthogonal du plan $(O, \vec{i}, \vec{j})$. La courbe Γ coupe l'axe des ordonnées au point A et l'axe des abscisses respectivement en B et C.



1) On cherche à retrouver les unités :

a. Calculer les coordonnées des points A, B et C.

b. Placer $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sur la figure ci-dessus.

2) Etude des limites

a. Déterminer $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$. Justifier la réponse.

b. On sait que $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0$. Développer $f(x)$ et en déduire sa limite en $+\infty$. Interpréter graphiquement le résultat.

3) Etude des variations

On admet que la fonction f est dérivable sur ℝ, et on note f' sa fonction dérivée.

a. Montrer que pour tout x réel : $f'(x) = (x^2 - 2x - 1)e^{-x}$.

b. Résoudre dans ℝ l'équation : $f'(x) = 0$ (Les solutions seront arrondies à 10^{-2}).
Déterminer le signe de $f'(x)$ sur ℝ.

c. En déduire le sens de variations de la fonction f sur ℝ.

Faire apparaître, sur le graphique, le ou les points de la courbe Γ en lesquels celle-ci admet une tangente horizontale.