CHAPITRE

10 Géométrie dans l'espace

1 Les prérequis : « Vérifier les acquis »

exercice	prérequis testés	réponses
1	• Définir un plan de l'espace. • Reconnaître des points coplanaires. • Définir une droite de l'espace. • Reconnaître si une droite est contenue dans un plan.	**a)** Trois points non alignés (ici A, B et G) définissent un plan et un seul. **b)** H : oui. C et E : non. **c)** (EH) : non ; (HG) : oui ; (AG) : oui. **d)** $A \in \mathcal{P}$ et $H \in \mathcal{P}$ donc (AH) est incluse dans $\mathcal{P}$. Or $I \in (AH)$. Donc $I \in \mathcal{P}$.
2	• Reconnaître deux plans sécants, deux plans parallèles. • Reconnaître si une droite est sécante à un plan. • Reconnaître deux droites sécantes, deux droites parallèles.	**a)** (GHE) et (ABF) sont sécants suivant la droite (EF). **b)** (DCG) et (BEF) sont strictement parallèles. **c)** (HC) et (DG) sont deux droites sécantes. **d)** (AD) et (GF) sont strictement parallèles. **e)** (GE) coupe (ABF) en E. **f)** (HF) est strictement parallèle au plan (ABC).
3	• Démontrer que deux plans sont parallèles. • Déterminer l'intersection de deux plans. • Démontrer que deux droites sont parallèles. • Utiliser le théorème du toit.	**a)** En utilisant le théorème des milieux on obtient : $(IJ) \,//\, (AB)$, puis $(IK) \,//\, (BC)$. Deux droites sécantes de $\mathcal{P}$ sont parallèles à deux droites sécantes de (ABC), donc $\mathcal{P} \,//\, (ABC)$. **b)** $\mathcal{P} \,//\, (ABC)$ et (SDC) coupe (ABC), donc $\mathcal{P}$ coupe (SDC) suivant la droite *d* parallèle à (DC) et qui passe par K. **c)** $(AB) \,//\, (DC)$ et $(DC) \,//\, d$ donc $(AB) \,//\, d$. **d)** (BCI) contient la droite (BC) ; (SAD) contient la droite (AD) ; de plus $(BC) \,//\, (AD)$. (SAD) et (BCI) ne sont pas parallèles (car I est un point commun à ces deux plans). Donc ces deux plans sont sécants suivant la droite parallèle à (BC) passant par I (on utilise le théorème du toit).
4	• Déterminer, dans un plan, un vecteur égal : – à un vecteur donné ; – à une somme de vecteurs. • Utiliser une caractérisation vectorielle du milieu d'un segment.	$\left.\begin{array}{l}\textbf{a) } \overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC} \\ \textbf{b) } \overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CF} \\ \textbf{c) } \overrightarrow{FC} + \overrightarrow{FE} = \overrightarrow{FD} \\ \textbf{d) } \overrightarrow{DI} = \overrightarrow{IF}\end{array}\right\\}$ car DCFE est un <u>rectangle</u>.

2 Objectifs

• Savoir déterminer la section d'un cube par un plan caractérisé par des éléments géométriques simples liés au cube.

• Rencontrer les différentes sections planes possibles d'un cube.

• Justifier la construction d'une section plane d'un cube au moyen de règles d'incidence admises en Seconde ou en Première.

• Savoir déterminer la section d'un tétraèdre par un plan caractérisé par des éléments géométriques simples liés au tétraèdre.

• Rencontrer les différentes sections planes possibles d'un tétraèdre.

• Justifier la construction d'une section plane d'un tétraèdre au moyen de règles d'incidence admises en Seconde ou en Première.

• Caractériser l'égalité de deux vecteurs de l'espace.

• Savoir additionner deux vecteurs dans l'espace.

• Savoir multiplier un vecteur par un réel dans l'espace.

• Effectuer quelques calculs simples sur des vecteurs de l'espace.

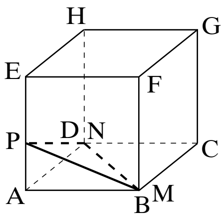
• Savoir caractériser des vecteurs coplanaires dans l'espace.

3 Activités d'approche

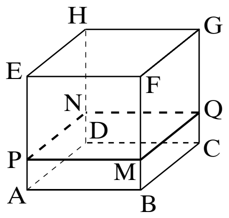
3.1 Sections d'un cube par un plan

1. Consulter le site compagnon : www.nathan.fr/hyperbole

2. a)



Si M = B et N = D.
triangle MNP



Si (MP) // (AB).
rectangle MPNQ

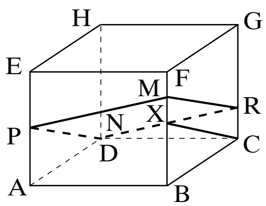
b) N = D et (MP) et (AB) ne sont pas parallèles.

• Le plan (MNP) coupe les plans parallèles (AEH) et (BCF) suivant deux droites parallèles, donc les droites (PN) et (MR) sont parallèles. MRNP est donc un trapèze.

• Pour que le quadrilatère obtenu soit un parallélogramme, il suffit que NP = MR.

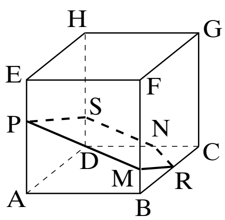
On va construire le segment [MR] sur la face (BCGF) de façon que MR = NP = DP.

Soit X le point de [BF] tel que CX = NP et (CX) // (NP).
On veut (MR) // (NP) et MR = NP donc (MR) // (CX) et MR = CX.
Si M ∈ [BX[alors MR < CX, il n'est pas possible d'avoir MR = CX et (MR) // (CX).



Si M ∈]XF] alors il est possible d'avoir MR = CX et (MR) // (CX).
On a alors : R ∈]CG] et (PM) // (NR).

c) • Le plan (MNP) coupe les plans (ABE) et (DCG) suivant deux droites parallèles : donc la section du plan (MNP) avec la face (DCGH) est le segment [NS] parallèle à (MP) et passant par N.

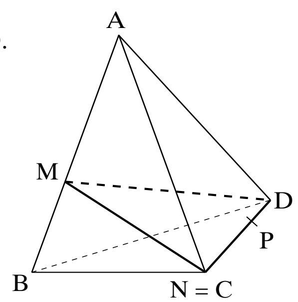


• Même raisonnement pour R :
on mène par M la parallèle à (PS), elle coupe (BC) en R et (MNP) coupe la face (BCGF) suivant le segment [MR].
• Il reste à tracer les segments [PS] et [NR] et on obtient le pentagone MPSNR.

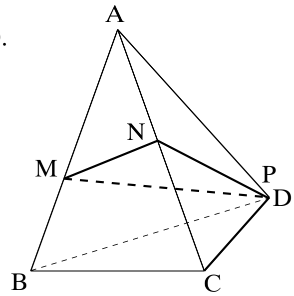
3.2 Sections d'un tétraèdre par un plan

1. Consulter le site compagnon : www.nathan.fr/hyperbole

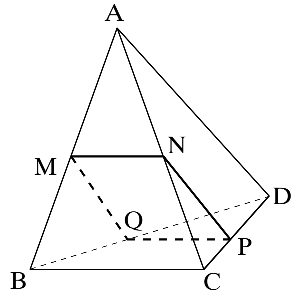
2. a) Cas N = C
La section est le triangle MCD.



Cas P = D
La section est le triangle MND.



Cas (MN) // (BC)
On applique le théorème du toit.
La section est le trapèze MNPQ.
Si, de plus, (NP) // (DA) alors la section est un parallélogramme.



b) La section obtenue est un parallélogramme lorsque :
(MN) // (BC) et (NP) // (AD).

3.3 Les vecteurs : du plan à l'espace

1. a) $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{EG}$; $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{EF}$ donc $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont pour représentants respectifs $\overrightarrow{EG}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{EF}$ qui ont leurs extrémités E, G, H et F dans un même plan (celui de la face (EFGH)).

b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{AE}$ ne sont pas coplanaires car $E \notin (ABD)$.

c) $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$ donc $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{DF}$ sont coplanaires.

2. a)
$$\begin{aligned}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} &= \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}\\ &= 2\overrightarrow{AB} + (\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DA}).\end{aligned}$$

(Or $\overrightarrow{BC} = -\overrightarrow{DA}$ car ABCD est un rectangle.)

Donc $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB} = 2\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = 2\overrightarrow{AB}$.

b) $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BJ} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{AB}$

Donc $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{DB})$ et $\overrightarrow{DB} = \overrightarrow{HF}$ car DBFH est un rectangle. D'où :

$$\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HF}).$$

4 Travaux dirigés

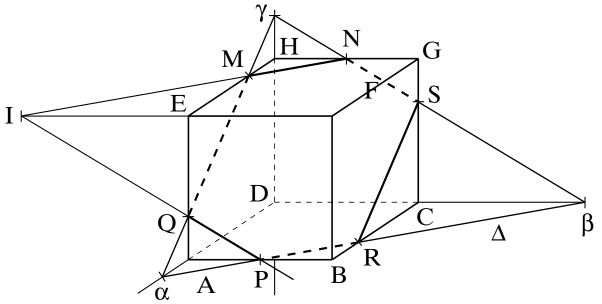
4.1 Section d'un cube par un plan

A. Notions utilisées

• Deux droites coplanaires et non parallèles sont sécantes.
• Deux plans parallèles coupés par un plan le sont suivant deux droites parallèles.
• Tracés hors-solides.

B. Corrigé

a) b) Soit I le point d'intersection des droites (MN) et (EF) dans le plan (EFG).
I ∈ (MN) et I ∈ (ABE).
I est le point d'intersection de la droite (MN) et du plan (ABE).



c) On construit la droite (IP). Elle coupe l'arête [AE] en Q. Le plan (MNP) coupe la face (ABFE) suivant le segment [PQ].

d) • (MNP) coupe la face (ADHE) suivant le segment [MQ].

• (MNP) coupe le plan (ABC) suivant la droite Δ parallèle à (MN) et passant par le point P. Δ coupe [BC] en R.

(MNP) coupe donc la face (ABCD) suivant le segment [PR].

• Il reste à construire le point S sur [CG], tel que $(RS) // (QM)$ (et aussi tel que $(QP) // (NS)$).

e) Cette section est l'hexagone MNSRPQ.

f) (MNP) coupe (AD) en α, (DC) en β et (DH) en γ.

4.2 Section d'un tétraèdre par un plan et patron

A. Notions utilisées

Pour le 1.

• Construction de la section d'un tétraèdre par un plan connaissant les intersections avec les faces.

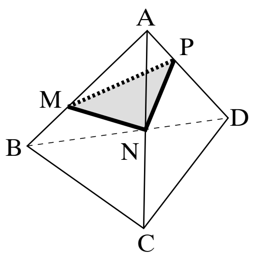
• Passer de la section vue en perspective au patron.

Pour le 2.

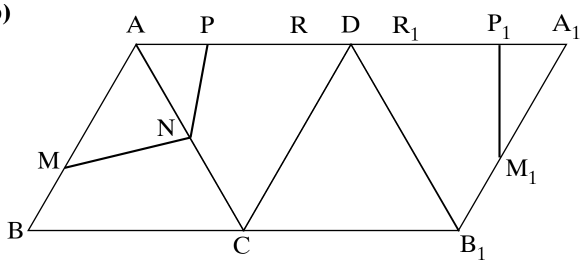
Passer de la section vue sur un patron à la section vue en perspective.

B. Corrigé

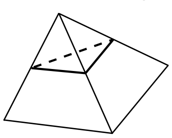
1. a)



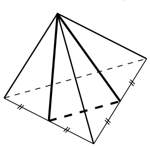
b)



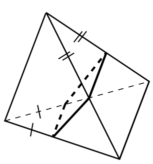
2. a) Un triangle



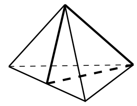
b) Un triangle



c) Un trapèze



d) Un triangle



4.3. Alignement de points

A. Notions utilisées

• Multiplication d'un vecteur par un réel dans l'espace, propriétés.

• Caractérisations des parallélogrammes dans le plan.

• Propriété de la droite parallèle à un côté d'un triangle et passant par le milieu d'un autre côté.

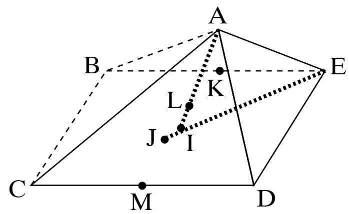
• Toute droite passant par deux points distincts d'un plan est incluse dans ce plan.

• Caractérisation du centre de gravité d'un triangle et du centre d'un parallélogramme.

• Caractérisation de l'alignement de points par la colinéarité de vecteurs.

B. Corrigé

1.



2. $\overrightarrow{BK} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CM}$ donc $(KM) // (ED)$.

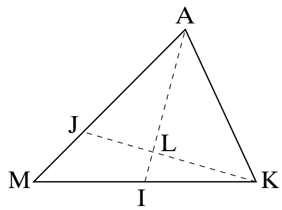
K est le milieu de [BE] donc (KM) passe par le milieu I de [BD] : il en résulte que I est dans le plan (AKM).

$J \in (AM)$ donc $J \in (AKM)$.

$L \in (AI)$ et $(AI) \subset (AKM)$ donc $L \in (AKM)$.

A, K, M, I, J et L sont coplanaires.

3. a)



b) $\overrightarrow{AL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{AI}$ donc $\overrightarrow{KL} = \frac{4}{5}\overrightarrow{KI} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$

$\overrightarrow{KL} = \frac{2}{5}\overrightarrow{KM} - \frac{1}{5}\overrightarrow{AK}$.

$\overrightarrow{AJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AM}$ donc $\overrightarrow{KJ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{KM} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AK}$.

Finalement $\overrightarrow{KL} = \frac{3}{5}\overrightarrow{KJ}$.

c) $\overrightarrow{KL}$ et $\overrightarrow{KJ}$ sont colinéaires donc K, L et J sont alignés.

4.4. Vecteurs, points coplanaires ou non

A. Notions utilisées

• Vecteurs coplanaires.

• Points coplanaires.

• Raisonnement par l'absurde.

• Calcul vectoriel dans l'espace.

B. Corrigé

1. a) $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$.

$\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ sont coplanaires équivaut à $\overrightarrow{CE}$, $\overrightarrow{CB}$, $\overrightarrow{CA}$ sont coplanaires.

Or $E \notin (CBA)$ car $E \in (BD)$ et $E \neq B$ et ABCD est un tétraèdre.

Par conséquent $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ ne sont pas coplanaires.

b) Si A, F, C et B étaient coplanaires, alors les vecteurs $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CB}$ et $\overrightarrow{CA}$ seraient coplanaires, ce qui est faux. Donc A, F, C et B ne sont pas coplanaires.

2. Dans le plan (ABD), $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$.

Or $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB}$. Par conséquent $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{BE}$.

Les droites (IJ) et (BE) sont donc parallèles, ce qui prouve que I, J, B et E sont des points coplanaires.

3. a) • $2\overrightarrow{CJ} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}$

$\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CE}$

(car $\overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CE}$)

• $2\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CE}$

$2\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{EB}$

$2\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{JI}$

b) $2\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{JC} + \overrightarrow{CI}$

$3\overrightarrow{CJ} - \overrightarrow{CF} = \overrightarrow{CI}$

$\overrightarrow{CI} = a\,\overrightarrow{CJ} + b\,\overrightarrow{CF}$, avec $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CF}$ non colinéaires.

Donc $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires.

c) Les vecteurs $\overrightarrow{CI}$, $\overrightarrow{CJ}$ et $\overrightarrow{CF}$ sont coplanaires et ont la même origine, donc les points C, I, J et F sont coplanaires.

4.5. Parallélisme de droites

A. Notions utilisées

• Multiplication d'un vecteur par un réel, propriétés.
• Caractérisation vectorielle des milieux, des centres de gravité.
• Caractérisation du parallélisme de droites par la colinéarité de vecteurs.

B. Corrigé

1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AI} + \overrightarrow{AJ} + \overrightarrow{JN}$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}\right)$

$= -\frac{1}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AD}$.

2. a) $\overrightarrow{FP} = \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GP} = \overrightarrow{EH} + \frac{1}{3}\overrightarrow{GH} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{EH}$.

b) $\overrightarrow{FP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$.

3. $\overrightarrow{FP} = \frac{4}{3}\overrightarrow{MN}$ donc $\overrightarrow{FP}$ et $\overrightarrow{MN}$ sont colinéaires.

Il en résulte que les droites (MN) et (FP) sont parallèles.

4.6. Réfléchir avec l'ordinateur

A. Notions utilisées

1. • Utiliser le logiciel Geospac, en particulier la création d'un polygone section d'un polyèdre par un plan, et les affichages d'une longueur (AM) et d'une aire.
• Conjecturer.
2. • Calcul vectoriel dans l'espace.
• Intersection d'une droite et d'un plan.
• Constructions de la section d'un cube par un plan.
• Étude des variations d'une fraction sur un intervalle.
• Optimisation de l'aire d'une surface dans l'espace.

B. Corrigé

1. e) Expérimentalement on trouve que si $0 < d \leqslant 2{,}32$ alors la section est un triangle, que si $2{,}32 \leqslant d \leqslant 4{,}61$ la section est un hexagone, que si $d \geqslant 4{,}61$ alors la section est un triangle.

Remarque : le cube figure de base n'a pas 5 cm de côté.

On conjecture que le maximum de l'aire est atteint lorsque M est le milieu de la diagonale [AG].

2. (1) a) $AG = 5\sqrt{3}$.

$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DC} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AG}$

(car $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ et $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{CG}$).

b) M_1 est le centre de gravité du triangle DEB signifie :

$$\overrightarrow{M_1D} + \overrightarrow{M_1B} + \overrightarrow{M_1E} = \vec{O},$$

ce qui implique : $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = 3\overrightarrow{AM_1}$.

On obtient donc $\overrightarrow{AG} = 3\overrightarrow{AM_1}$.

Ceci signifie que M_1 (centre de gravité de DEB) appartient à la droite (AG). Comme (AG) est orthogonale au plan (DEB), (AG) coupe donc (DEB) en M_1 ;

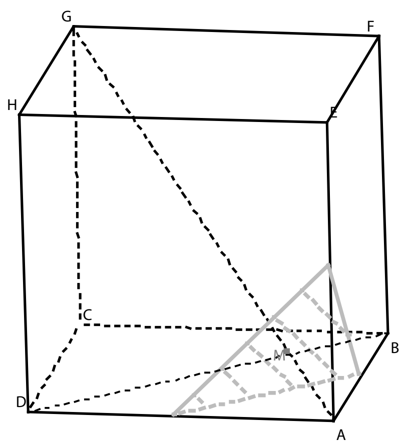
de plus $AM_1 = \frac{1}{3}AG$.

c) De la même façon, on montre que

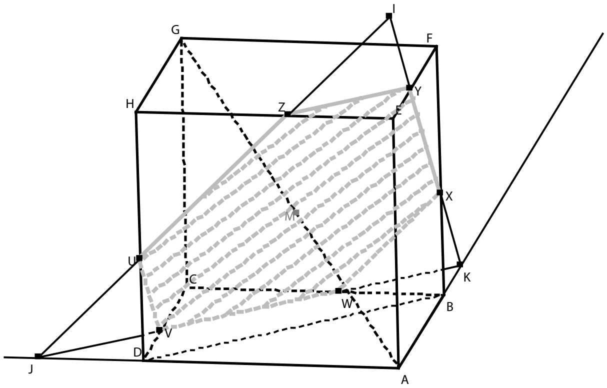
$\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{GF} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{GA}$, puis que (GA) coupe le plan (CFH) en M_2, centre de gravité du triangle CFH.

On a $GM_2 = \frac{1}{3}GA$ (ou $AM_2 = \frac{2}{3}AG$).

d) Si d est inférieur à $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ ou supérieur à $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ la section est un triangle.



Si d est compris entre $\frac{5\sqrt{3}}{3}$ et $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ la section est un hexagone.



2. (2) a) Les aires des hexagones obtenus sont supérieures ou égales à l'aire des triangles DEB et CFH, donc aux aires de tous les triangles sections obtenus dans le cas $d \leqslant \frac{5\sqrt{3}}{3}$ ou $d \geqslant \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

Par conséquent, le maximum de cette aire est obtenu si la section est un hexagone, c'est-à-dire si $\frac{5\sqrt{3}}{3} \leqslant d \leqslant \frac{10\sqrt{3}}{3}$.

b) $\mathscr{A}'(d) = \frac{3\sqrt{3}}{2}(10\sqrt{3} - 4d)$

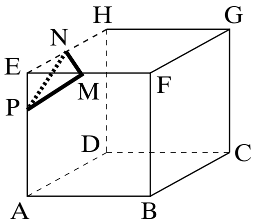
d	$\frac{5\sqrt{3}}{3}$		$\frac{5\sqrt{3}}{2}$		$\frac{10\sqrt{3}}{3}$
$\mathscr{A}'(d)$	||	+	0	−	||
$\mathscr{A}(d)$	||	↗		↘	||

$\mathscr{A}'$ s'annule pour $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$. $\mathscr{A}$ est maximale pour $d = \frac{5\sqrt{3}}{2}$, c'est-à-dire lorsque $AM = \frac{1}{2}AG$, c'est-à-dire M milieu de [AG]. Ce maximum vaut $\frac{75\sqrt{3}}{4}$. Une autre méthode consiste à écrire $-2d^2 + 10\sqrt{3}d - 25$ sous forme canonique.

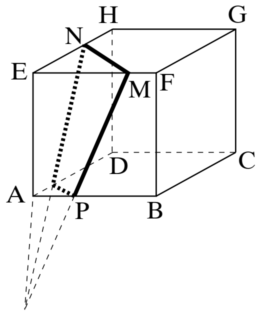
Exercices d'application

1 - a) Le carré ABFE. **b)** Le rectangle BCHE.
c) Le triangle BDE.

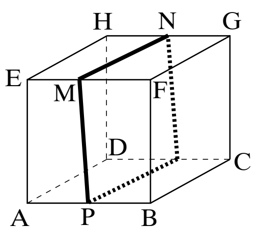
2 - a)



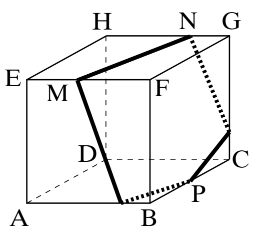
b)



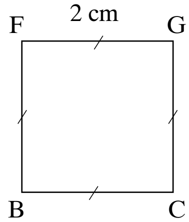
c)



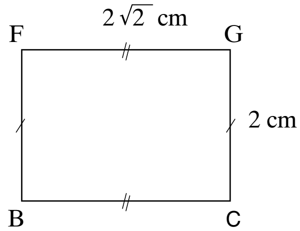
d)



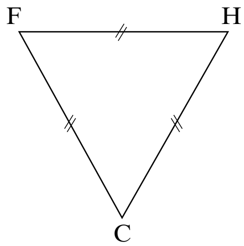
3 - a)



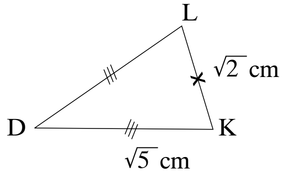
b)



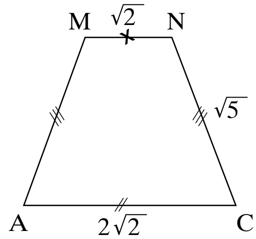
c)



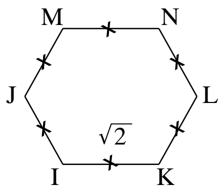
d)



e)

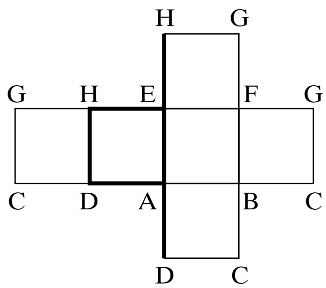


f)

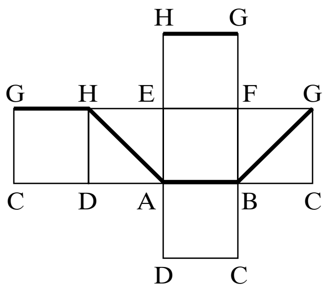


4 - Échelle $\frac{1}{2}$

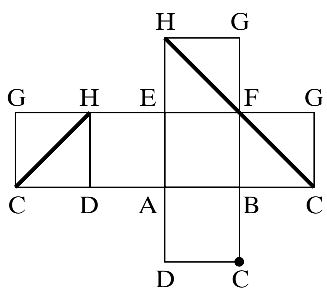
a)



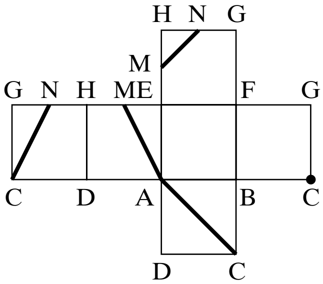
b)



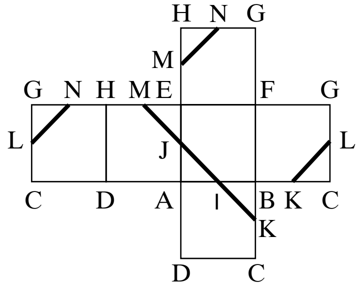
c)



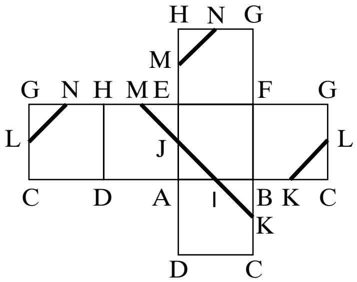
d)



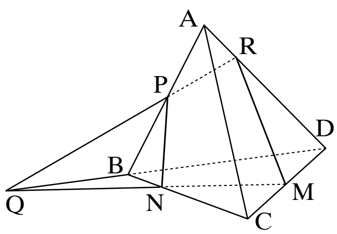
e)



f)

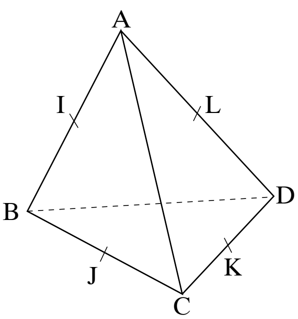


5 - Les droites (MN) et (BD) sont coplanaires dans le plan (BCD) et elles ne sont pas parallèles, donc elles se coupent en un point Q (situé en dehors du solide).



Les points P et Q appartiennent tous deux aux plans (MNP) et (ABD) donc le plan (MNP) coupe le plan (ABD) suivant la droite (PQ). (PQ) coupe (AD) en R. Le plan (MNP) coupe la face (ABD) suivant le segment [PR]. La section du tétraèdre par le plan (MNP) est le quadrilatère MNPR dessiné ci-dessus.

6 - **a)**



b) (IJ) et (KL) sont parallèles à (AC) (droites des milieux).

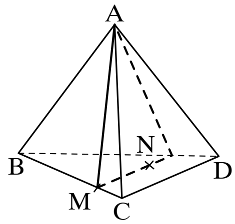
c) Même réponse qu'au **b)**.

d) IJKL est un parallélogramme.

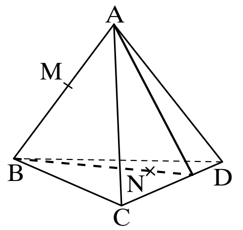
e) (IJK) = (IJKL) coupe ABC suivant [IJ]
ACD suivant [KL]
ABD suivant [IL]
BCD suivant [JK].

La section est le parallélogramme IJKL.

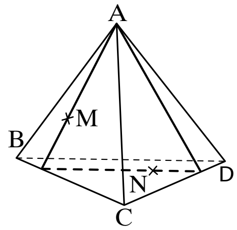
7 - **a)**



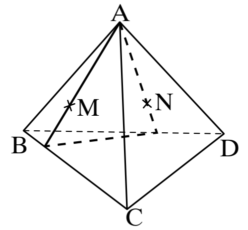
b)



c)



d)



8 - **a)** $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{BF}$ car ADHE, DCGH, CGFB et ABFE sont des carrés donc des parallélogrammes.

b) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AF}$ car ABFE est un parallélogramme.

c) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CG} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AF}$.

d) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{HD}$
$= \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{HD} = \overrightarrow{EG} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{EC}$.

9 -

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$

$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{CA} + 2\overrightarrow{AD}$

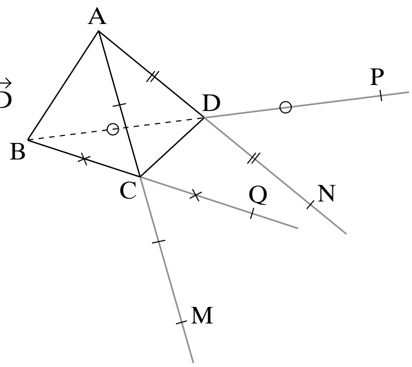
$\overrightarrow{MN} = 2\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QB} + \overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{CB} + 2\overrightarrow{BD}$

$\overrightarrow{QP} = 2\overrightarrow{CD}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$, donc MNPQ est un parallélogramme.

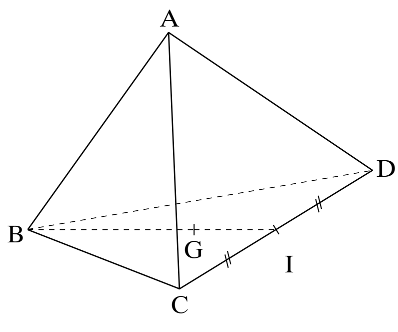


10 - $\vec{u} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{EH} + \overrightarrow{BF}$

$\vec{u} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DH}$ donc $\boldsymbol{\vec{u}} = \mathbf{\overrightarrow{GH}}$.

11 - $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{ED} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB}$
$= \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC} + \left(\underbrace{\overrightarrow{ED} + \overrightarrow{CB}}_{\vec{0}}\right) = \overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AC}$.

12 - **a)** G est le point d'intersection des médianes du triangle BCD, ou le point tel que $\overrightarrow{BG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BI}$.



b) $\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD} = 2\overrightarrow{GI}$

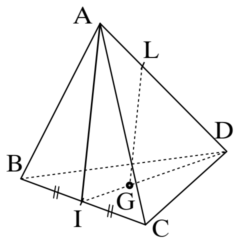
$\overrightarrow{GB} = -2\overrightarrow{GI}$

c) $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD} = 3\overrightarrow{AG}+\overrightarrow{GB}+\underbrace{\overrightarrow{GC}+\overrightarrow{GD}}$

$= 3\overrightarrow{AG}-2\overrightarrow{GI}+2\overrightarrow{GI} = 3\overrightarrow{AG}.$

Donc $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}$ est colinéaire à $\overrightarrow{AG}$.

13 - a)



b) $\overrightarrow{LD} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ et $\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

c) $\overrightarrow{LG} = \overrightarrow{LD}+\overrightarrow{DG} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{DI}$

$= \frac{2}{3}(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}) = \frac{2}{3}\overrightarrow{AI}.$

$\overrightarrow{LG}$ et $\overrightarrow{AI}$ sont colinéaires donc (AI) et (LG) sont parallèles.

14 - Méthode 1 :

$\overrightarrow{DH} = \overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{FC}$. Les vecteurs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ ont pour représentants respectifs $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{CG}$ et $\overrightarrow{FC}$ dont les extrémités B, C, G, F sont dans un même plan. Donc $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont coplanaires.

Méthode 2 :

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{IF}+\overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CJ}.$

$\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{FB}+\overrightarrow{BC}$ car $\overrightarrow{IF} = \overrightarrow{JC}$.

$\overrightarrow{IJ} = -\overrightarrow{DH}+\overrightarrow{BC}.$

$\overrightarrow{IJ} = a\overrightarrow{DH}+b\overrightarrow{BC}$ donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{DH}$ et $\overrightarrow{BC}$ sont coplanaires.

15 - a) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{HI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JF}$

$= \overrightarrow{AI}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{JC}+\overrightarrow{IA}+\overrightarrow{IJ}+\overrightarrow{CJ} = 2\overrightarrow{IJ}.$

b) $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HF} = \overrightarrow{AC}+\overrightarrow{DB}$: somme de deux vecteurs du plan (ABC) donc $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{HF}$ et $\overrightarrow{IJ}$ sont trois vecteurs du plan (ABC), ils sont coplanaires.

16 - a) $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EB}$ et $\overrightarrow{DC}$ sont trois vecteurs du plan (BCD), ils sont donc coplanaires.

b) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{AD}$ ne sont pas coplanaires, sinon A, B, C et D seraient dans un même plan.

c) $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{DE}$ sont coplanaires car $\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{CB}$:

$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{DE}$ sont des vecteurs du plan (ABC).

17 - $\overrightarrow{OJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FG}$ car O est le milieu de [HF] et J celui de [HG].

$\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$. Or $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$. Donc $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{AI}$.

D'où $\overrightarrow{AO} = \overrightarrow{IJ}$.

$\overrightarrow{FB} = \overrightarrow{EA}$. G est dans le plan (EAO) car $\overrightarrow{EG} = 2\overrightarrow{EO}$. (AC) // (EG) donc C ∈ (EAO).

E, A, O, C sont dans le plan (EAO). Donc $\overrightarrow{IJ}$, $\overrightarrow{EC}$ et $\overrightarrow{FB}$ sont coplanaires.

Avant d'aller plus loin

QCM

18 - b) **19 - c)** **20 - b)** **21 - a)**
22 - c) **23 - a)** **24 - c)** **25 - c)**

Vrai ou Faux

26 - V **27** - F **28** - V **29** - F **30** - F **31** - V
32 - V **33** - F **34** - V **35** - F **36** - F **37** - V
38 - V **39** - V **40** - F

Exercices d'approfondissement

41 - a) $\overrightarrow{IC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{EJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}$.

b) $\overrightarrow{IC} = \overrightarrow{EJ}$ donc (IC) // (EJ) (EIJ) coupe (ABCD) suivant (IC).

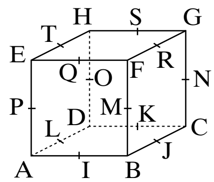
La section est le parallélogramme EICJ.

c) $EI = \sqrt{a^2+\frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{2} = EJ$: EICJ est un losange.

d) $EC^2 = 3a^2$ $EI^2 = \frac{5a^2}{4}$.

e) $EC^2 \neq EI^2+EI^2$ donc EICJ n'est pas un carré.

42 - a)



b) R, S, M, I, L, O sont équidistants des points E et C.

c) $\overrightarrow{RS} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$ $\overrightarrow{IL} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD} = \frac{1}{2}\overrightarrow{FH}$

$\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{FH}$

Par conséquent, $\overrightarrow{RS}$, $\overrightarrow{IL}$ et $\overrightarrow{MO}$ sont colinéaires.

(De la même façon, $\overrightarrow{MR} = \overrightarrow{LO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{IS}$, $\overrightarrow{MR}$, $\overrightarrow{LO}$ et $\overrightarrow{IS}$ sont colinéaires.)

Pour démontrer que R, S, M, I, L, O sont coplanaires, il suffit donc de démontrer que I, M, R, S sont coplanaires.

Or $\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IM}+\overrightarrow{MR}+\overrightarrow{RS}$

$\overrightarrow{IS} = \overrightarrow{IM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IS}+\overrightarrow{IS}-\overrightarrow{IR}$

$\overrightarrow{IR} = \overrightarrow{IM}+\frac{1}{2}\overrightarrow{IS}.$

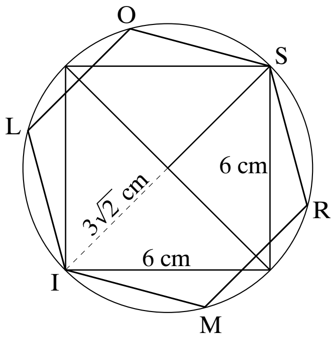
Les vecteurs $\overrightarrow{IR}$, $\overrightarrow{IM}$ et $\overrightarrow{IS}$ sont coplanaires, donc les points I, R, M et S sont coplanaires dans un plan $\mathcal{P}$.

(IL) // (SR) donc L ∈ $\mathcal{P}$. (MO) // (RS) donc M ∈ $\mathcal{P}$.

d) La section du cube par le plan $\mathcal{P}$ est l'hexagone IMRSOL.

Ses côtés sont tous égaux à $3\sqrt{2}$ cm.

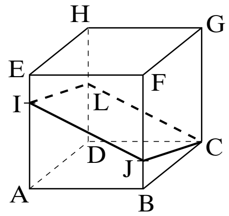
De plus, $IS = MO = RL = 6\sqrt{2}$ cm.



Les segments [OM], [IS] et [RL] se coupent au centre du cube, qui est donc aussi le centre de cet hexagone.
Cet hexgone est régulier et inscrit dans un cercle de rayon $3\sqrt{2}$ cm .

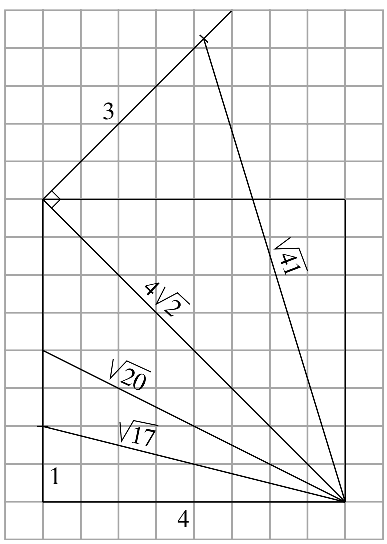
43 - a) La section est le parallélogramme IJCL représenté ci-contre.
On calcule IJ et CJ dans des triangles rectangles en utilisant le théorème de Pythagore et on obtient :

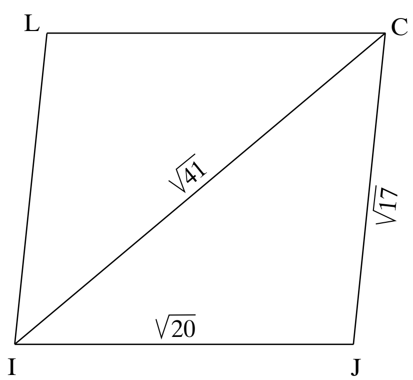
$$IJ = CL = \sqrt{20} = 2\sqrt{5}$$
$$\text{et } CJ = IL = \sqrt{17}.$$



Ces longueurs ne suffisent pas pour construire le parallélogramme IJCL. On calcule donc IC.
Dans le triangle AIC rectangle en A : $IC^2 = IA^2 + AC^2$ donc $IC = \sqrt{41}$.

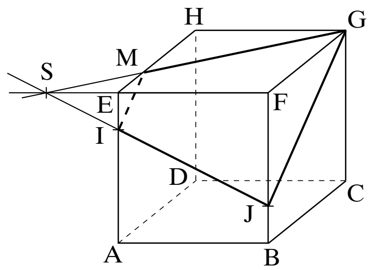
Le tracé en vraie grandeur va utiliser les longueurs $2\sqrt{5}$, $\sqrt{17}$ et $\sqrt{41}$, que l'on va construire comme hypoténuses de trois triangles rectangles.





Remarque : $\widehat{IJC} \neq 90°$ car $41 \neq 20 + 17$.

b) La section obtenue est le trapèze IJGM.



$IJ = \sqrt{20}$

$GJ = \sqrt{16+9} = 5.$

Pour calculer IM, on va raisonner dans le plan IJG, en faisant intervenir le point S.
Le théorème de Thalès dans le plan (ABE) permet d'écrire :

$$\frac{EI}{FJ} = \frac{SI}{SJ} = \frac{SE}{SF}.$$

Le théorème de Thalès dans le plan (EFG) permet d'écrire :

$$\frac{EM}{FG} = \frac{SE}{SF} = \frac{SM}{SG}.$$

Par conséquent : $\dfrac{EM}{FG} = \dfrac{EI}{FJ}$ et $EM = \dfrac{1}{3} \times 4$.

Dans le plan IJG, le théorème de Thalès permet d'écrire :

$$\frac{IM}{JG} = \frac{SI}{SJ}.$$

Par conséquent, $IM = JG \times \dfrac{SI}{SI} = JG \times \dfrac{EI}{FJ} = 5 \times \dfrac{1}{3}$.

Autre méthode : dans le triangle rectangle EIM ;

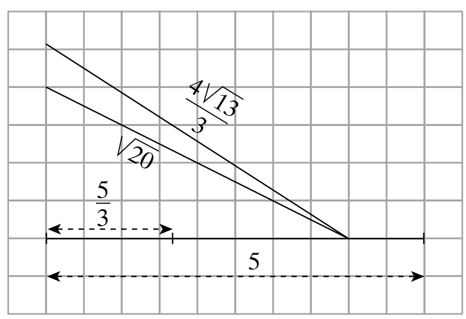
$EM = \dfrac{4}{3}$ et $EI = 1$ donc $IM = \sqrt{\dfrac{16}{9} + 1}$.

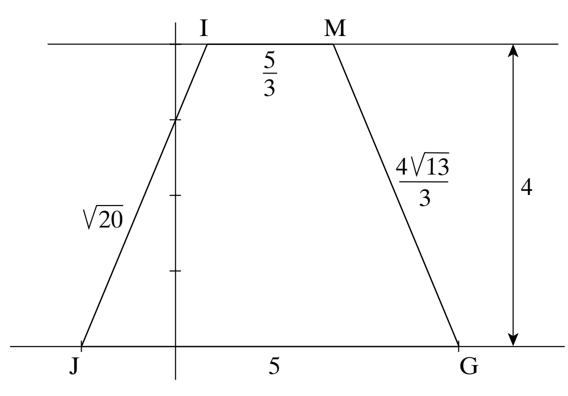
$IM = \dfrac{5}{3}$.

$MG = \sqrt{MH^2 + HG^2}$

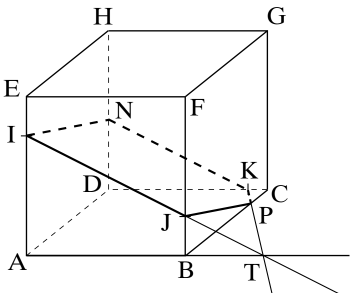
$MG = \sqrt{\dfrac{64}{9} + 16} = \dfrac{\sqrt{208}}{3} = \dfrac{4\sqrt{13}}{3}$.

On construira ce trapèze IJGM en utilisant les longueurs des quatre côtés et en utilisant le fait que les bases [JG] et [IM] sont distantes de 4 cm.



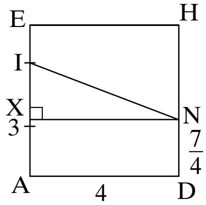


c) La section obtenue est le pentagone IJPKN.



$\text{IJ} = \sqrt{20}$ $\quad$ $\text{NK} = \frac{3{,}5}{4} \times \text{JI} = 3{,}5\,\frac{\sqrt{20}}{4} = \frac{7}{8}\sqrt{20}$.

$\text{DN} = \frac{3{,}5}{4} \times 2 = \frac{7}{4}$ $\quad$ $\text{IX} = 3 - \frac{7}{4} = \frac{5}{4}$



Donc $\text{IN} = \sqrt{\frac{25}{16} + 16}$

$\text{IN} = \sqrt{\frac{281}{16}} = \sqrt{\frac{281}{4}}$

Quelle est la position du point T ?

$\frac{\text{TB}}{\text{TA}} = \frac{\text{JB}}{\text{IA}} = \frac{1}{3}$

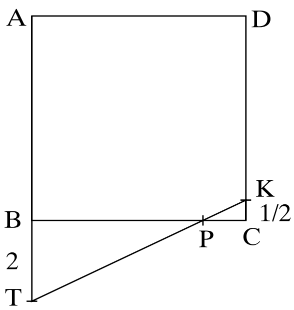
$\text{TB} = \frac{1}{3}\text{TA}$ donc $\text{TB} = \frac{1}{2}\text{AB} = 2$.

On en déduit la position du point P sur le segment [BC].

$\frac{\text{PC}}{\text{PB}} = \frac{1}{4}$, soit $\text{CP} = \frac{4}{5}$.

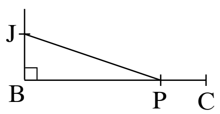
On peut donc calculer PK dans le triangle rectangle PCK et on obtient :

$\text{PK} = \frac{\sqrt{89}}{10}$.



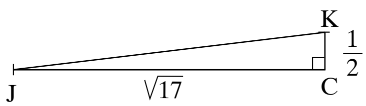
Calcul de JP :

$\text{JP} = \sqrt{1 + \left(\frac{16}{5}\right)^2}$ $\quad$ $\text{JP} = \frac{\sqrt{281}}{5}$



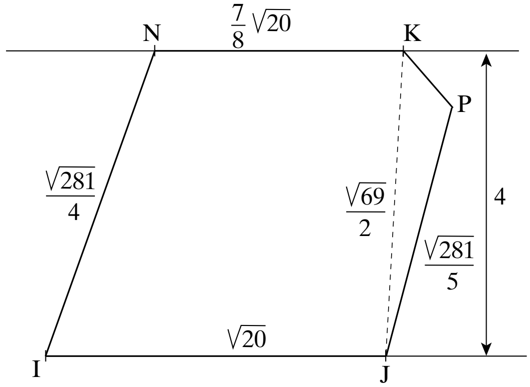
On connaît les cinq côtés du pentagone, et aussi la distance de 4 cm entre les côtés [IJ] et [NK] (parallèles) et entre les côtés (IN) et (JP) (parallèles).

On va aussi calculer JK dans le triangle rectangle en C, KCJ.

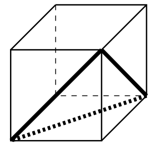
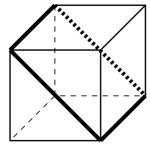


$\text{JC} = \sqrt{17}$

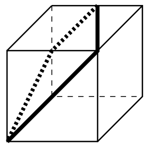
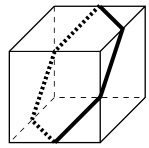
$\text{JK} = \sqrt{\frac{1}{4} + 17} = \sqrt{\frac{69}{2}}$



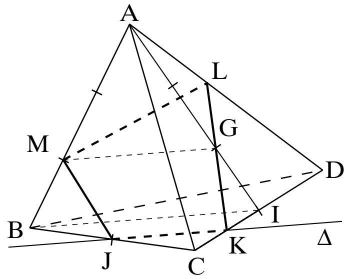
44 - a) triangle équilatéral $\quad$ **b)** rectangle

c) trapèze $\quad$ **d)** hexagone

45 - 1. Voir figure.



2. $\overrightarrow{\text{AM}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AB}}$

$\overrightarrow{\text{AG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AI}}$

Donc $\overrightarrow{\text{MG}} = \overrightarrow{\text{MA}} + \overrightarrow{\text{AG}}$

$\overrightarrow{\text{MG}} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\text{BA}} + \overrightarrow{\text{AI}})$

$\overrightarrow{\text{MG}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{BI}}$.

(MG) // (BI) et (BI) est contenue dans le plan (BCD) donc (MG) // (BCD).

3. a) (MG) // (BCD) $\quad$ (MG) // (JMG)

D'autre part, (BCD) et (JMG) sont sécants. Donc leur droite d'intersection est parallèle à la droite (MG).

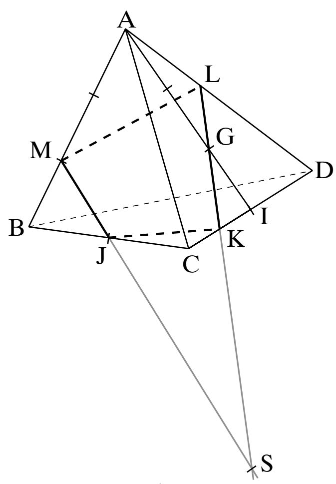
Cette droite passe par J.

Donc (JMG) coupe le plan (BCD) suivant la droite Δ passant par J et parallèle à (MG), et à (BI).

Soit K l'intersection de Δ et de [CD]. (JMG) coupe le plan (ACD) suivant la droite (KG). Soit L l'intersection de (KG) et de [AD].

La section du tétraèdre par le plan (JMG) est le quadrilatère MJKL.

b) On utilise le tracé hors-solide. Le point S, intersection des droites (MJ) et (AC), appartient aux plans (MJG) et (ACD), donc (SG) est la droite d'intersection des plans (JMG) et (ACD).

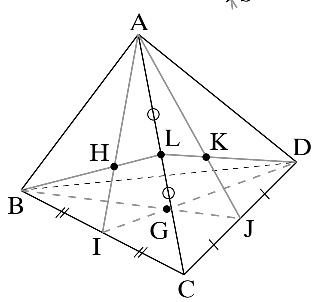


46 - a) Soient I, J et L les milieux des arêtes [BC], [CD] et [AC]

$\overrightarrow{\text{HK}} = \overrightarrow{\text{AK}} - \overrightarrow{\text{AH}}$

$\overrightarrow{\text{HK}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AJ}} - \frac{2}{3}\overrightarrow{\text{AI}}$

$\overrightarrow{\text{HK}} = \frac{2}{3}(\overrightarrow{\text{IJ}})$.

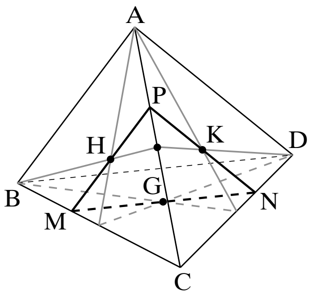


Or $\overrightarrow{IJ} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BD}$ $\quad \overrightarrow{HK} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BD}$.

De la même façon, on démontre que $\overrightarrow{GH} = \frac{1}{3}\overrightarrow{DA}$.

b) Deux droites sécantes de (ABD) : (BD) et (AD) sont parallèles à deux droites sécantes de (GHK) : (HK) et (HG). Par conséquent, ces deux plans (ABD) et (GHK) sont parallèles.

c) (GHK) // (ABD) donc le plan (ABC) coupe ces deux plans suivant deux droites parallèles : donc (ABC) coupe (GHK) suivant la parallèle à (AB) qui passe par H.

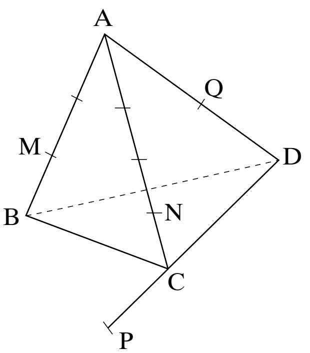


De la même façon, on obtient que (ACD) coupe (GHK) suivant la parallèle à (AD) passant par K, et (BCD) coupe (GHK) suivant la parallèle à (BD) passant par G. On construit donc ces trois parallèles, puis on les limite à leurs intersections avec les faces. La section est le triangle MNP.

47 - a) Le triangle BFJ.

b) Le triangle FIH.

48 - 1.



2. a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AC}$.

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CP}$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}(-\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD})$$

$$= -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$$

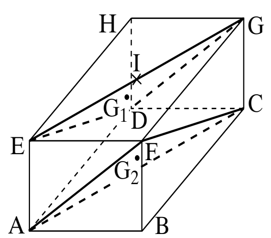
$$\overrightarrow{MQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}.$$

b) $x\overrightarrow{MN} + y\overrightarrow{MP} = \left(-\frac{2}{3}x - \frac{2}{3}y\right)\overrightarrow{AB} + \left(\frac{3}{4}x + \frac{3}{2}y\right)\overrightarrow{AC} - \frac{y}{2}\overrightarrow{AD}$.

Il suffit que $y = -1$ et $x = 2$.

c) $\overrightarrow{MQ} = 2\overrightarrow{MN} - \overrightarrow{MP}$ donc M, N, P et Q sont coplanaires.

49 - a)



b) $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = 3\overrightarrow{HG_1} + \overrightarrow{G_1D} + \overrightarrow{G_1E} + \overrightarrow{G_1G}$

$= 3\overrightarrow{HG_1} - 2\overrightarrow{G_1I} + 2\overrightarrow{G_1I} = 3\overrightarrow{HG_1}$

donc $\overrightarrow{HG_1} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG})$.

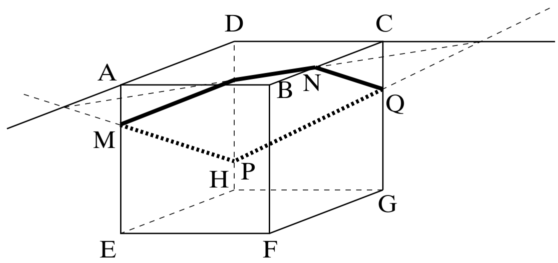
c) $\overrightarrow{HD} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{HG} = \overrightarrow{HA} + \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{HB}$

donc $\overrightarrow{HG_1} = \frac{1}{3}\overrightarrow{HB}$.

On prouve, de même, que : $\overrightarrow{BG_2} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BH}$.

Donc $\overrightarrow{HG_1} = \overrightarrow{G_2B}$.

50 - 1. et **2.**



3. a) Si (CG) était parallèle au plan (MNP), l'intersection de (MNP) et de (ADHE) serait une droite parallèle à (CG) ce qui n'est pas le cas puisque (MP) n'est pas parallèle à (CG). Donc Q existe.

b) On peut estimer que $x = \frac{1}{3}$.

Cherchons la valeur de x telle que $\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ soient colinéaires.

$$\overrightarrow{MP} = -\frac{1}{4}\overrightarrow{AE} + \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AE}$$

$$\overrightarrow{NQ} = \overrightarrow{NC} + \overrightarrow{CQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + x\overrightarrow{AE}.$$

$\overrightarrow{MP}$ et $\overrightarrow{NQ}$ sont colinéaires si et seulement si $x = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2}$ soit $x = \frac{1}{3}$, ce qui vérifie l'estimation.

51 - 1. a) $\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IA} + \overrightarrow{LI} + \overrightarrow{IB}$

$= 2\overrightarrow{LI} + \overrightarrow{O}$

$\overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} = 2\overrightarrow{LI}$

$$\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{LK} + \overrightarrow{KD}$$

$$= 3\overrightarrow{LK} + \Big(\underbrace{\overrightarrow{KB} + \overrightarrow{KC} + \overrightarrow{KD}}_{\overrightarrow{O}}\Big)$$

$$\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD} = 3\overrightarrow{LK}$$

b) $2\overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{LJ} - 3\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LB} + 2\overrightarrow{LJ} - (\overrightarrow{LB} + \overrightarrow{LC} + \overrightarrow{LD})$

$= \overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LC} - \overrightarrow{LD} + 2\overrightarrow{LJ}$

or $2\overrightarrow{LJ} = \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LC}$.

Donc $2\overrightarrow{LI} + 2\overrightarrow{LJ} - 3\overrightarrow{LK} = \overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LC} - \overrightarrow{LD} + \overrightarrow{LA} + \overrightarrow{LC}$

$= 2\overrightarrow{LA} - \overrightarrow{LD}$

$= \overrightarrow{O}$ car $\overrightarrow{LD} = 2\overrightarrow{LA}$

2. a) Trois vecteurs $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ sont coplanaires si, et seulement si, $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$, où $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires.

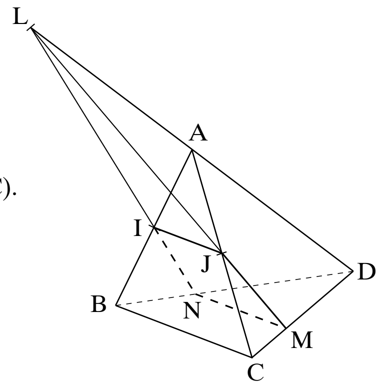
b) D'après **1. b)**, on a :

$$\overrightarrow{LK} = \frac{2}{3}\overrightarrow{LI} + \frac{2}{3}\overrightarrow{LJ}$$

Donc $\overrightarrow{LK}$, $\overrightarrow{LI}$ et $\overrightarrow{LJ}$ sont coplanaires. Ces trois vecteurs ont, de plus, la même origine, donc les points I, J, K et L sont coplanaires.

3. Le point L appartenant à la fois aux plans (IJK), (ADC) et (ABD), on en déduit que (IJK) coupe le plan (ABD) suivant la droite (IL) et le plan (ACD) suivant la droite (JL).

La section cherchée est le trapèze IJMN, où (IJ) // (MN) // (BC).



52 - a) • $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MH} + \overrightarrow{HE} + \overrightarrow{EN}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HE} + \frac{1}{4}\overrightarrow{EF}$

$\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{CB} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BI}$

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{CI}$.

• $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NF} + \overrightarrow{FB} + \overrightarrow{BP}$

$\overrightarrow{NP} = \frac{3}{4}\overrightarrow{EF} + \overrightarrow{GC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{BA}$

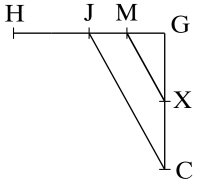
$\overrightarrow{NP} = \underbrace{\frac{3}{4}\overrightarrow{HG} + \frac{1}{4}\overrightarrow{GH}} + \overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{NP} = \qquad \overrightarrow{JG} \qquad + \overrightarrow{GC}$

$\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JC}$.

b) Le plan (MNP) coupe les faces (EFGH) et (ABFE) suivant les segments [MN] et [NP], et la face (DCGH) suivant un segment parallèle à (NP) et passant par M.

Soit [MX] ce segment.



Comme $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{JC}$, on en déduit, dans le triangle JCG, que X est le milieu de [GC] donc X = R.

En faisant le même raisonnement, on démontre que (MNP) coupe la face (ABCD) suivant le segment [PQ], où Q est le milieu de [BC].

c) $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{PB} + \overrightarrow{BG} + \overrightarrow{GM}$

$\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{BG}$ (car $\overrightarrow{PB} = \overrightarrow{MG} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$)

$\overrightarrow{PM} = 2\overrightarrow{QR}$.

d) • $QR = \frac{1}{2}BG = \frac{1}{2}a\sqrt{2}$ $\qquad$ $\mathbf{QR = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$

• $QP = \frac{1}{2}CI = \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ $\qquad$ $\mathbf{QP = \frac{a\sqrt{5}}{4}}$

• $PN = JC = CI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

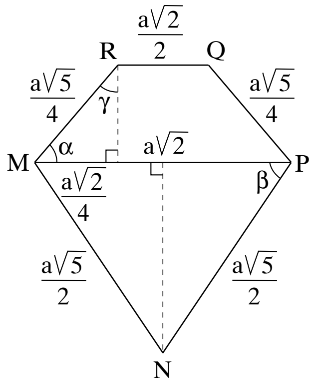
• $NM = CI = \frac{a\sqrt{5}}{2}$

• $MR = \sqrt{\frac{a^2}{16} + \frac{a^2}{4}} = \frac{a\sqrt{5}}{4}$

e) $PM = 2QR$ et $(PM) // (QR)$

$$\cos(\alpha) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$$



MNP est un triangle isocèle

$$\text{avec } \cos(\beta) = \frac{\frac{a\sqrt{2}}{2}}{\frac{a\sqrt{5}}{2}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}.$$

Par conséquent $\widehat{NMR} = \widehat{NPQ} = 2\alpha$

et $\cos(2\alpha) = 2\cos^2(\alpha) - 1 = 2 \times \frac{2}{5} - 1 = -\frac{1}{5}$

$\widehat{NMR} = \widehat{NPQ} \approx 101{,}54°$

$\widehat{MNP} = 180° - \widehat{NMR}$

$\widehat{MNP} = 78{,}46°$

Calcul de γ : $\sin(\gamma) = \dfrac{\frac{a\sqrt{2}}{4}}{\frac{a\sqrt{5}}{4}} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{5}}$.

Donc $\gamma \approx 50{,}77°$.

D'où $\widehat{MRQ} \approx 140{,}77°$ et $\widehat{RQP} \approx 140{,}77°$

53 - 1. b **2.** a et b **3.** a et c
4. b **5.** c **6.** b **7.** c

54 - 1. a)

$$\overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{GA'} + \overrightarrow{A'D} = \vec{O}$$

$$4\overrightarrow{GA'} + (\underbrace{\overrightarrow{A'A} + \overrightarrow{A'B} + \overrightarrow{A'C} + \overrightarrow{A'D}}_{\vec{O}}) = \vec{O}$$

$$\text{d'où } 4\overrightarrow{GA} + 4\overrightarrow{AA'} - \overrightarrow{AA'} = \vec{O}$$

$$\text{soit : } \overrightarrow{AG} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AA'}.$$

b) $AG = \frac{3}{4}AA'$.

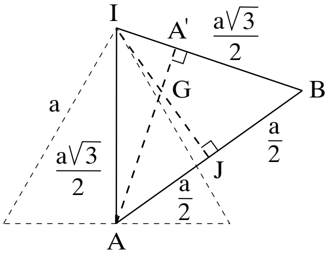
De la même façon on démontrera que $BG = \frac{3}{4}BB'$, $CG = \frac{3}{4}CC'$ et $DG = \frac{3}{4}DD'$ ou B', C', D' sont les centres de gravité des triangles ACD, BAD et ABC.

Or AA' = BB' = CC' = DD' (que l'on peut redémontrer en utilisant le théorème de Pythagore).
Par conséquent AG = BG = CG = DG.

2. a) Notons I le milieu de [CD].
a la longueur du côté du tétraèdre.
On a donc :

$\text{IA} = \text{IB} = a\dfrac{\sqrt{3}}{2}$,

d'où la figure du triangle IAB ci-contre :



Dans le triangle AIB, [AA'] est la hauteur issue de A.
Calcul de AA' :

$\text{AI}^2 = \text{AA'}^2 + \text{IA'}^2$

$$\text{AA'} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2 - \left(\frac{1}{3}\frac{a\sqrt{3}}{2}\right)^2}$$

$\text{AA'} = a\sqrt{\dfrac{2}{3}}$. Donc $\text{AG} = \dfrac{3}{4}\text{AA'} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Notons J le milieu de [AB].
AIB étant un triangle isocèle en I, (IJ) est perpendiculaire à [AB].
Calcul de $\widehat{\text{AGJ}}$ dans le triangle rectangle AJG :

$$\sin\left(\widehat{\text{AGJ}}\right) = \frac{\text{AJ}}{\text{AG}} = \frac{\frac{a}{2}}{\frac{a\sqrt{6}}{4}} = \frac{2}{\sqrt{6}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

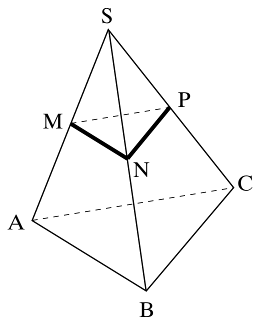
d'où $\widehat{\text{AGJ}} \approx 54{,}736°$ et $\widehat{\text{AGB}} = 2\widehat{\text{AGJ}} \approx 109{,}47°$.
L'angle entre deux liaisons C – H est **environ 109,5°**.

b) On a $\text{AG} = 1{,}09 \,.\, 10^{-10}$ m.
On veut calculer $\text{AB} = a$.

Or $\text{AG} = \dfrac{a\sqrt{6}}{4}$.

Donc $a = \dfrac{4 \times 1{,}09 \,.\, 10^{-10}}{\sqrt{6}}$ m. $\quad a \approx 1{,}78 \,.\, 10^{-10}$ m.

55 - 1. a)



b) (MN) // (AB) donc (MNP) // (AB), (ABC) // (AB).
De même (MNP) // (AC) et (ABC) // (AC).

c) Si (MNP) et (ABC) étaient sécants, leur intersection serait parallèle à (AB) et (AC) ce qui est exclu.
Donc (MNP) // (ABC).

d) Le plan (SBC) coupe les deux plans parallèles (MNP) et (ABC) suivant deux droites parallèles donc (NP) // (BC).

2. a. $\dfrac{\text{SM}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SN}}{\text{SB}}$ et $\dfrac{\text{SM}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SP}}{\text{SC}}$.

b) Donc $\dfrac{\text{SN}}{\text{SB}} = \dfrac{\text{SP}}{\text{SC}}$ avec N ∈ [SB] et P ∈ [SC].

Il en résulte que (PN) // (BC) (Réciproque de Thalès).

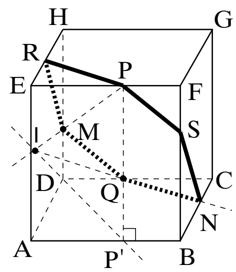
3. a. M ∈ [SA] donc il existe un réel x tel que $\overrightarrow{\text{SM}} = x\overrightarrow{\text{SA}}$.

b) $x \in [0;1]$ donc $x = \dfrac{\text{SM}}{\text{SA}} = \dfrac{\text{SN}}{\text{SB}}$; $\overrightarrow{\text{SN}} = x\overrightarrow{\text{SB}}$.

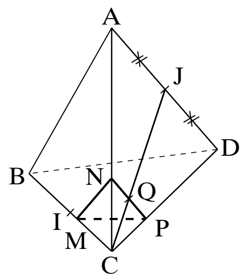
De même $\overrightarrow{\text{SP}} = x\overrightarrow{\text{SC}}$.

c) $\overrightarrow{\text{NP}} = \overrightarrow{\text{NS}} + \overrightarrow{\text{SP}} = x(\overrightarrow{\text{BS}} + \overrightarrow{\text{SC}}) = x\overrightarrow{\text{BC}}$ $\quad$ (NP) // (BC).

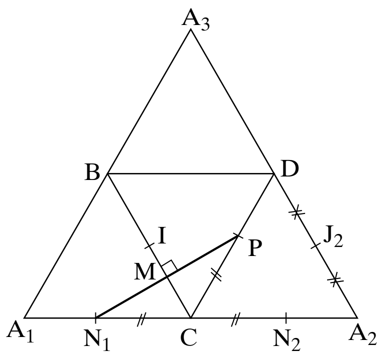
56 - La droite orthogonale à (ABCD) passant par P coupe (ABCD) en P'. (MP) coupe (ABCD) à l'intersection I de (MP) et (DP').
(MNP) coupe (ABCD) suivant (IN). (IN) coupe (DC) en Q.
La parallèle à (QN) passant par P coupe (EH) en R.
La parallèle à (QM) passant par P coupe (FB) en S.
La section cherchée est MRPSNQ.



57 - On cherche tout d'abord la nature du triangle MNP.
En construisant un patron du tétraèdre régulier ABCD, et en construisant les segments [MN] et [MP] sur les faces respectives ABC et BCD, et perpendiculaires tous deux à (BC), on obtient MN = MP (les triangles CNM et CMP sont isométriques).
Le triangle MNP est isocèle en M.



• Analyse
Lorque M décrit]CI], N décrit]CA] et P décrit]CD].



Notons Q le milieu de [NP]. Q appartient à la face CDA. Le triangle CPN étant isocèle en C (car CN = CP : voir patron), la médiane [CQ] du triangle CPN est aussi hauteur de CPN issue de C, donc comme $\dfrac{\text{CN}}{\text{CA}} = \dfrac{\text{CP}}{\text{CD}}$, on a (PN) // (AD) et Q appartient à la hauteur (et médiane) [CJ] issue de C dans le triangle ACD.

• Synthèse

Supposons que $Q \in\ ]CJ]$.

On veut démontrer que Q est le milieu de [PN], où MNP est la section du tétraèdre par le plan passant par M point de]CI] et orthogonal à (BC).

Sur le patron ci-dessus, on obtient $Q \in\ ]CJ_2]$.

On en déduit qu'on peut construire deux points N_2 et P respectivement sur $]CA_2]$ et]CD] tels que Q est milieu de $[N_2P]$ et $(PN_2) /\!/ (A_2D)$ (à l'aide du théorème de Thalès).

On construit alors le point N_1 sur $]CA_1]$ tel que $CN_1 = CN_2$.

Le triangle CPN_1 est isocèle en C donc si l'on note M le pied de la hauteur issue de C, on a : $M \in\ ]CB]$, et même $M \in\ ]CI]$ car P décrit]CD] ; d'autre part $[MP] \perp [BC]$ $[MN_1] \perp [BC]$ sur le patron, ce qui donne sur le solide : $(MP) \perp (BC)$ et $(MN) \perp (BC)$ donc le plan (MNP) est orthogonal à (BC), ce qu'il fallait démontrer.

Le lieu de Q, milieu de [NP] est donc le segment]CJ] privé de C, où J est le milieu de [AD].

58 - En centimètres : $IJ = 5$ (Pythagore)

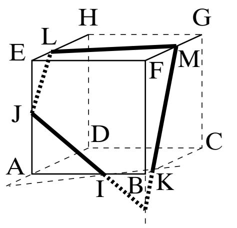
$IK = \sqrt{5}$ (Pythagore)

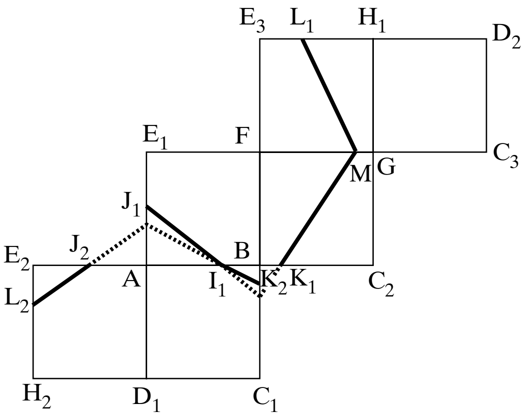
(BK) est orthogonale à (ABFE) donc perpendiculaire à (JB). D'où $JK = \sqrt{46}$ (Pythagore)

$EL = 2$ (Thalès sur le patron).

D'où $JL = \sqrt{13}$ (Pythagore).

Patron du cube à l'échelle $\frac{1}{4}$.





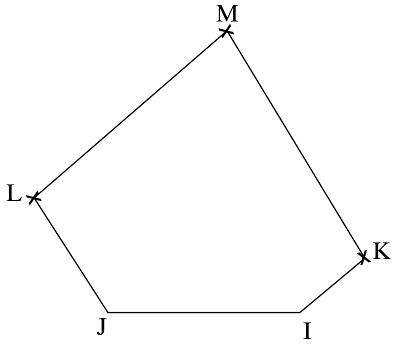
(EL) est orthogonale à (ABFE) donc perpendiculaire à (EI). D'où $IL = \sqrt{56}$ (Pythagore).

On construit : [IJ], K en utilisant $IK = \sqrt{5}$ (accessible directement sur le patron) et $JK = \sqrt{46}$ (hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés JB et 1), L en utilisant $JL = \sqrt{13}$ (accessible directement sur le patron) ;

$IL = \sqrt{56}$ (hypoténuse d'un triangle rectangle de côtés IE et EL) et la convexité de IJLMK.

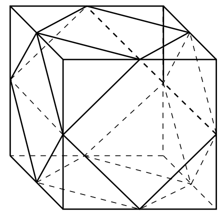
M en utilisant : $(LM) /\!/ (IK)$ et $(JL) /\!/ (KM)$

ou bien LM et KM (accessibles directement sur le patron) et la convexité de IJLMK.



Problèmes de synthèse

59 - **1. a)** Voir schéma.



b) $\mathcal{S}$ a 14 faces : 6 carrées et 8 triangulaires équilatérales.

$\mathcal{S}$ a 12 sommets et 24 arêtes.

Les faces triangulaires sont équilatérales car toutes leurs arêtes ont pour longueur $\frac{3\sqrt{2}}{2}$ cm.

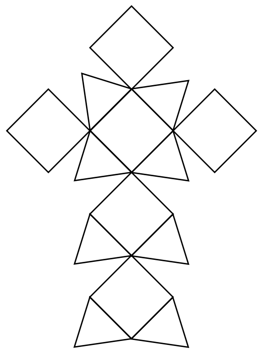
Les autres sont carrées car :

• côtés opposés parallèles à une même diagonale de face ;

• côtés de même longueur $\frac{3}{\sqrt{2}}$ cm ;

• côtés consécutifs perpendiculaires (leur angle est $180° - 2 \times 45°$).

2. a) Échelle $\frac{1}{4}$



b) $A = \left[6 \times \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2 + 8 \times \left(\frac{1}{2} \times \frac{3\sqrt{2}}{2} \times \frac{3\sqrt{6}}{4}\right)\right]$ cm²

$A = (27 + 9\sqrt{3})$ cm².

3. $V = \left[27 - 8 \times \left(\frac{1}{3} \times \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{3}{2}\right)\right]$ cm³ ; $V = 22{,}5$ cm³.

60 - **1.** $(MN) /\!/ (CD) /\!/ (PQ)$ et $(MQ) /\!/ (AB) /\!/ (NP)$ donc MNPQ est un parallélogramme.

2. $(QM) /\!/ (AB)$ et $(AB) \perp (BCD)$

donc $(QM) \perp (BCD)$

$(QM) \perp (MN)$.

3. a) $MN = x$.

b) $\frac{MQ}{AB} = \frac{CM}{CB}$ donc $MQ = 4 - x$.

c) $\text{aire}(MNPQ) = x(4 - x) = 4x - x^2$.

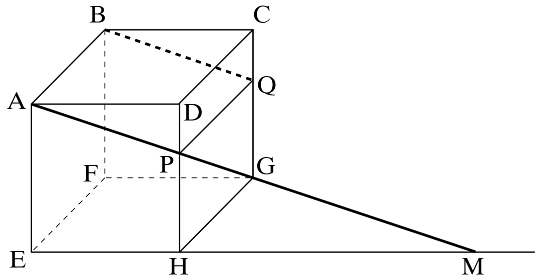
4. a) Pour tout x de [0,4] $f'(x) = 4 - 2x$.

b)

x	0		2		4
$f'(x)$		+	0	−	
$f(x)$	0	↗	4	↘	0

c) L'aire de MNPQ est maximale lorsque $x = 2$.
Elle vaut alors 4 cm^2.

61 - 1. a) $(BQ) // (AP)$



b) APQB est un rectangle
$((AP) // (BQ)$; $(AB) // (PQ)$; $(AB) \perp (AP))$.

2. a) $\dfrac{DP}{4 - DP} = \dfrac{4}{x}$, $\quad DP = \dfrac{16}{x+4}$.

b) $\text{Volume}\ (APDBQC) = \dfrac{1}{2} \times 4 \times \left(\dfrac{16}{x+4}\right) \times 4$

$$= \frac{128}{x+4}.$$

3. a) $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$.

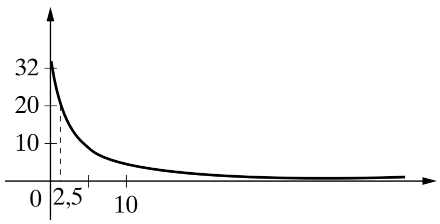
b) Pour tout réel $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\dfrac{128}{(x+4)^2} < 0$.

f est strictement décroissante sur $[0 ; +\infty[$.

c)

x	0	$+\infty$
$f(x)$	32 ↘	0

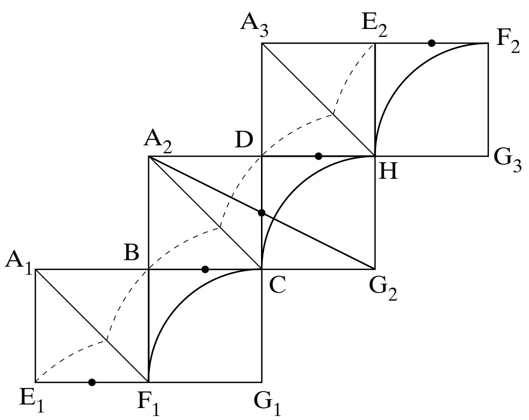
d)



4. a) $x \approx 2{,}5$.

b) $\dfrac{128}{x+4} = 20$ équivaut à $x = 2{,}4$.

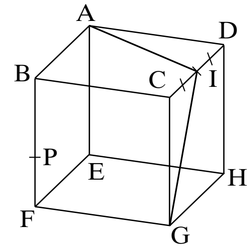
62 - 1.



2. Sur les trois faces GCBF, GCDH et GHEF, l'ensemble des points M tels que $GC = GM$ est un arc de cercle centré en G et de rayon GC. $(GC = 1)$.

D'autre part, si M est sur une autre face, la « distance » de G à M est strictement supérieure à 1.

En effet, tout chemin qui relie G et M coupe la ligne brisée CDHEFBC au moins une fois, disons par exemple en un point P de [BF]. Et alors, la longueur du chemin reliant G à M est supérieure ou égale à la distance usuelle GP dans la face GFBC, et $GP > 1$ (théorème de Pythagore dans GFP).



3. Il s'agit de raisonner dans les faces ABCD, ADHE et AEFB.

Les points M à construire vérifient $GM = GB = \sqrt{2}$.

Il faut faire intervenir les médiatrices de $[E_2D]$, de $[BD]$ et de $[BE_1]$ qui régionnent le plan car suivant que l'on est d'un côté ou de l'autre de la médiatrice de $[BD]$ par exemple, l'ensemble des points M à la distance $\sqrt{2}$ de G est un arc de cercle de centre G_2, ou bien de centre G_1.

On obtient une ligne joignant E_1 à E_2 et formée d'arcs de cercle de centres respectifs G_1, G_2 et G_3 et de rayon $\sqrt{2}$ (en pointillés sur le patron).

4. a) Le chemin de longueur minimale de A à G en restant sur les faces ABCD et CDHG est le segment $[A_2G_2]$ sur le patron.

Le segment $[A_2G_2]$ coupe $[DC]$ en son milieu I, car $[A_2G_2]$ est une diagonale du rectangle A_2HG_2B et elle coupe la médiatrice des côtés en leurs milieux.

Sur le dessin en perspective, le chemin le plus court relie A au milieu I de $[CD]$, puis I à G par des segments.

b) La longueur est $\sqrt{1^2 + 2^2}$, soit $\sqrt{5}$.

5. a) Sur chaque couple de faces contiguës, l'ensemble des points du cube à égale « distance » de A et G est situé sur la médiatrice du segment joignant A à G, ce qui donne :

b) • Sur le patron : on obtient une ligne brisée passant par les milieux de $[E_1F_1]$, $[F_1B]$, $[BC]$, $[CD]$, $[DH]$, $[HE_2]$ et $[E_2F_2]$ et constitué de morceaux de médiatrices de segments $[A_iG_j]$.