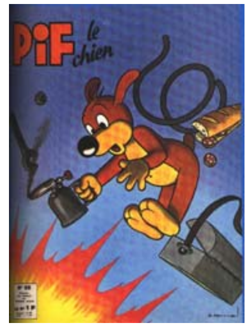
Fonctions et encadrements



On peut dans certains cas encadrer une expression
en utilisant les variations des fonctions usuelles.

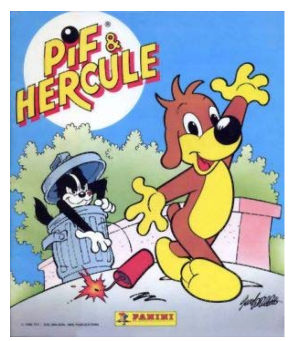
Rappels : La fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$ et décroissante sur $\mathbb{R}_-$
La fonction inverse est décroissante sur $\mathbb{R}_-^*$ et sur $\mathbb{R}_+^*$
La fonction cube est croissante sur $\mathbb{R}$
La fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

Théorème 1 :

> Si f est une fonction croissante sur un intervalle I
> alors elle conserve l'ordre sur I

C'est-à-dire que pour tous éléments a et b de I tels que $a < b$
alors $f(a) < f(b)$

exemple 1 : donner un encadrement de f sur l'intervalle I :
$h(x) = -(x+3)^2 + 2$ avec $I = [-2;-1]$



> Sachant que l'on travaille sur l'intervalle I
> on obtient un encadrement de x
> sur lequel on débute les calculs

On a : $-2 \leq x \leq -1$

$\Rightarrow 1 \leq x+3 \leq 2$ ⇐ $\Rightarrow x + 3$ est positif

$\Rightarrow u(1) \leq u(x+3) \leq u(2)$ ⇐ et la fonction carrée u est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow 1 \leq (x+3)^2 \leq 4$

$\Rightarrow -4 \leq -(x+3)^2 \leq -1$

$\Rightarrow -2 \leq -(x+3)^2 + 2 \leq 1$

$\Rightarrow -2 \leq h(x) \leq 1$

Théorème 2 :

> Si f est une fonction décroissante sur un intervalle I
> alors elle ne conserve pas l'ordre sur I

C'est-à-dire que pour tous a et b éléments de I si $a < b$

alors on $f(a) > f(b)$

c'est-à-dire $f(b) < f(a)$

exemple 2 : $h(x) = -(x+3)^2 + 2$ avec $I = [-4;-3]$

On a : $-4 \le x \le -3$

$\Rightarrow -1 \le x+3 \le 0$ — $x + 3$ est négatif

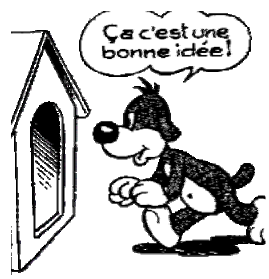
$\Rightarrow u(0) \le u(x+3) \le u(-1)$ — et la fonction carrée u est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

$\Rightarrow 0 \le (x+3)^2 \le 1$

$\Rightarrow -1 \le -(x+3)^2 \le 0$

$\Rightarrow 1 \le -(x+3)^2 + 2 \le 2$

$\Rightarrow 1 \le h(x) \le 2$



exemple 3 : $h(x) = \dfrac{2}{x+4}$ avec $I = [-2;-1]$

$-2 \le x \le -1 \Rightarrow 2 \le x+4 \le 3$: (les valeurs de $x+4$ sont positives)

$\Rightarrow v(3) \le v(x+4) \le v(2)$ — et la fonction inverse v est décroissante sur $\mathbb{R}_+^*$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3} \le \dfrac{1}{x+4} \le \dfrac{1}{2}$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3} \le \dfrac{2}{x+4} \le 1$

$\Rightarrow \dfrac{2}{3} \le h(x) \le 1$

exemple 4 : $h(x) = \sqrt{x^2+1}$ avec $I = [-2;-1]$

On a : $-2 \le x \le -1$

$\Rightarrow 1 \le x^2 \le 4$ — et la fonction carrée est décroissante sur $\mathbb{R}_-$

$\Rightarrow 2 \le x^2 + 1 \le 5$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le \sqrt{x^2+1} \le \sqrt{5}$ — et la fonction racine carrée est croissante sur $\mathbb{R}_+$

$\Rightarrow \sqrt{2} \le f(x) \le \sqrt{5}$