Suites arithmético-géométriques

On considère la suite (u_n) définie par $\begin{cases} u_0 = 5 \\ u_{n+1} = 0,5u_n - 4 \end{cases}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$

La suite (u_n) est dite **arithmético-géométrique** , en fait elle n'est ni arithmétique , ni géométrique . On aurait :

- sans le 0,5 : $u_{n+1} = u_n - 4$ et donc (u_n) serait arithmétique
- sans le - 4 : $u_{n+1} = 0,5u_n$ et donc (u_n) serait géométrique

Pour l'étudier , on va devoir utiliser une suite intermédiaire v :

1) Soit (v_n) la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par : $v_n = u_n + 8$.

Démontrer que la suite (v_n) est géométrique .

Montrons que le rapport $\frac{v_{n+1}}{v_n}$ est constant :

$$\frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{u_{n+1}+8}{u_n+8}$$

$$= \frac{(0,5u_n - 4)+8}{u_n+8}$$

On n'exprime le quotient qu'à l'aide des termes u_n pour se donner ensuite la possibilité de le simplifier

$$= \frac{0,5u_n+4}{u_n+8}$$

$$= \frac{0,5(u_n+8)}{u_n+8}$$

on a factorisé le numérateur par 0,5

$$= 0,5$$

Donc (v_n) est une suite géométrique

de raison $0,5$

et de premier terme $v_0 = u_0 + 8 = 13$

2) Exprimer v_n , puis u_n en fonction de n .

D'après ce qui précède $v_n = v_0 \times q^n$

$$\Rightarrow v_n = 13(0,5)^n$$

On a directement : $u_n = 13(0,5)^n - 8$ car $v_n = u_n + 8$

3) Etudier la convergence de la suite (u_n)

Etant donné que $0 < 0,5 < 1$, il en résulte que la suite (v_n) converge vers 0 et que la suite (u_n) converge vers -8 .

4) Pour n entier naturel, on pose : $S_n = v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n$

et $T_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$

Donner les expressions de S_n et T_n , ainsi que leurs limites .

$$S_n = v_0 \frac{1-q^{n+1}}{1-q}$$

car (v_n) est une suite géométrique de raison $0,5$ et de premier terme v_0

$$= 13 \times \frac{1-0,5^{n+1}}{1-0,5}$$

$$= 26 \times \left(1-0,5^{n+1}\right)$$

$T_n = u_0 + u_1 + u_2 + ... + u_n$ somme de ($n+1$) termes

$$= (v_0 - 8) + (v_1 - 8) + (v_2 - 8) + ... + (v_n - 8)$$

$$= (v_0 + v_1 + v_2 + ... + v_n) + (-8)(n+1)$$

$$= S_n - 8(n+1)$$

On a vu que $0,5^{n+1}$ converge vers 0 , donc $\lim\limits_{n \to +\infty} S_n = 26$

Et comme $\lim\limits_{n \to +\infty} -8(n+1) = -\infty$, alors par somme on a : $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = -\infty$