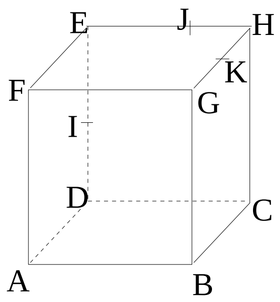
On considère le cube ABCDEFGH de la figure suivante.

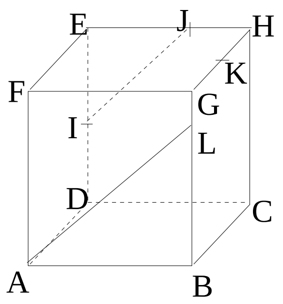


1. Reproduire la figure et construire les points :
- I milieu de [DE]
- J tel que $\overrightarrow{EJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{EH}$
- K milieu de [GH]

2. Montrer que le point A se trouve dans le plan (IJK).
(aide : on pourra calculer calculer $3\overrightarrow{AJ}$ et $2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AK}$)

> Méthode suggérée par l'aide :
>
> $\overrightarrow{AJ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{FE}+\overrightarrow{EJ}=\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}$ donc $3\overrightarrow{AJ}=3\overrightarrow{AF}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}$.
>
> $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DI}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BG}+\overrightarrow{GK}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AF}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$,
>
> donc $2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AK}=2\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AF}+2\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{AF}+\overrightarrow{AD}=3\overrightarrow{AF}+3\overrightarrow{AD}+2\overrightarrow{AB}$.
>
> On constate que $3\overrightarrow{AJ}=2\overrightarrow{AI}+2\overrightarrow{AK}$, donc que $\overrightarrow{AJ}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AI}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AK}$.
>
> Ainsi les vecteurs $\overrightarrow{AJ}$, $\overrightarrow{AI}$ et $\overrightarrow{AK}$ sont coplanaires, cela montre que les points A, I, J et K sont coplanaires et que le point A est donc dans le plan (IJK).

3- Construire le point L intersection de la droite (BG) avec le plan (IJK).
Déterminer le réel k tel que $\overrightarrow{BL}=k\overrightarrow{BG}$.



> Comme les plans (AFG) et (DEH) sont parallèles, le plan (IJK) les coupe suivant des droites parallèles.
>
> (IJK) coupe (DEH) suivant (IJ), donc (IJK) coupe (AFG) suivant la parallèle à (IJ) passant par A dont on a vu précédemment qu'il était dans (IJK).
>
> La parallèle à (IJ) passant par A est dans le plan (AFG), elle coupe donc la droite (BG) qui est dans le même plan en un point qui est le point L cherché.
>
> Comme B, L et G sont alignés, il existe bien un réel k tel que $\overrightarrow{BL}=k\overrightarrow{BG}$.
>
> Comme (AL) // (IJ), il existe aussi un réel k' tel que $\overrightarrow{AL}=k'\overrightarrow{IJ}$.
>
> Ainsi, $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BL}=k'(\overrightarrow{IE}+\overrightarrow{EJ})$, soit $\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AF}=k'\left(\frac{1}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{2}{3}\overrightarrow{EJ}\right)=\frac{k'}{2}\overrightarrow{AF}+\frac{2k'}{3}\overrightarrow{AB}$.
>
> Par identification, on en déduit que : $\begin{cases}\frac{2k'}{3}=1\\ \frac{k'}{2}=k\end{cases}$, ce qui donne $k'=\frac{3}{2}$ et $k=\frac{3}{4}$.