

Exercice 1

- On doit d'abord encadrer $-v$: $-2 > v > -1 \Leftrightarrow 1 < -v < 2$.

En additionnant membre à membre avec l'encadrement de u : $\frac{1}{4} + 1 \leq u - v \leq \frac{1}{3} + 2 \Leftrightarrow \frac{5}{4} \leq u - v \leq \frac{7}{3}$

- On a $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3}$ et $-2 \leq v \leq -1$. Ces deux inégalités sont de même sens mais ne portent pas toutes les

deux sur des nombres positifs : on écrit donc $1 < -v < 2$ et $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3}$. On peut alors les multiplier

membre à membre et on a $\frac{1}{4} \times 1 \leq -uv \leq \frac{1}{3} \times 2$ d'où $-\frac{2}{3} \leq uv \leq -\frac{1}{4}$

- On a $-2 \leq v \leq -1$ d'où $1 < v+3 < 2$. La fonction « carré » étant strictement croissante sur $]0; +\infty[$, on a : $1 < (v+3)^2 < 4$.

D'autre part $\frac{1}{4} \leq u \leq \frac{1}{3}$, la fonction inverse étant strictement décroissante sur $]0; +\infty[$, on obtient

$$3 < \frac{1}{u} < 4.$$

On a alors $1 < (v+3)^2 < 4$ et $3 < \frac{1}{u} < 4$. Ces deux inégalités sont de même sens et portent toutes les

deux sur des nombres positifs d'où $3 < \frac{(v+3)^2}{u} < 16$.

Exercice 2

$$1) a) f(x) = 2x^2 - 7x + 3 = 2\left(x^2 - \frac{7}{2}x + \frac{3}{2}\right) = 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{49}{16} + \frac{3}{2}\right] = 2\left[\left(x - \frac{7}{4}\right)^2 - \frac{25}{16}\right].$$

b) Pour l'équation $f(x) = 0$: $a = 2$, $b = -7$ et $c = 3$.

$$\text{On trouve } \Delta = 25 = 5^2. \text{ Deux solutions } x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{7-5}{4} = \frac{1}{2} \text{ et } x_2 = \frac{7+5}{4} = 3 \quad S = \left\{\frac{1}{2}; 3\right\}$$

2)

a) Pour tout x réel : $(x+2)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + (2a+b)x^2 + (2b+c)x + 2c$.

$$\text{Par identification : } \begin{cases} a = 2 \\ 2a + b = -3 \\ 2b + c = 11 \\ 2c = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ 4 + b = -3 \\ 2b + 3 = 11 \\ c = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = 2 \\ b = -7 \\ 2b = -14 \\ c = 3 \end{cases} \quad a = 2, b = -7 \text{ et } c = 3.$$

$$\text{Et } g(x) = (x+2)(2x^2 - 7x + 3) = (x+2)f(x)$$

$$b) g(x) = 0 \Leftrightarrow (x+2)(2x^2 - 7x + 3) = 0 \Leftrightarrow (x+2) = 0 \text{ ou } f(x) = 0. \text{ Alors : } S = \left\{-2; \frac{1}{2}; 3\right\}$$

Exercice 3

La courbe C_1 a deux points d'intersection avec l'axe des abscisses, donc le trinôme qu'elle représente possède deux racines donc son discriminant est strictement positif.

La courbe C_2 n'a aucun point d'intersection avec l'axe des abscisses, donc le trinôme qu'elle représente n'a pas de racine donc son discriminant est strictement négatif.

La courbe C_3 a un unique point commun avec l'axe des abscisses donc le trinôme qu'elle représente a une racine double donc son discriminant est nul.

Il reste donc à calculer le discriminant de chacun des trinômes.

Pour $f(x)$, $a=1$, $b=2$ et $c=3$ donc $\Delta_f = b^2 - 4ac = 4 - 12 = -16$.

Pour $g(x)$, $a=2$, $b=-5$ et $c=3$ donc $\Delta_g = b^2 - 4ac = 25 - 24 = 1$.

Pour $h(x)$, $a=3$, $b=-6$ et $c=3$ donc $\Delta_h = b^2 - 4ac = 36 - 36 = 0$.

En conclusion : C_1 représente g , C_2 représente f et C_3 représente h .

Ex 4.

1- $A(2 ; 0)$, $M(x ; \sqrt{x})$, $AM = \sqrt{(x-2)^2 + (\sqrt{x}-0)^2} = \sqrt{x^2 - 4x + 4 + x} = \sqrt{x^2 - 3x + 4}$

2- Pour $x \in [0 ; 5]$, $(x - \frac{3}{2})^2 + \frac{7}{4} = x^2 - 3x + \frac{9}{4} + \frac{7}{4} = x^2 - 3x + 4 = AM^2 = f(x)$

3- v fonction définie sur $[-\frac{3}{2} ; \frac{7}{2}]$ par $v(x) = x^2 + \frac{7}{4}$

La courbe représentative de la fonction v se déduit de celle de la fonction carrée par la translation de vecteur $\frac{7}{4} \vec{j}$ et le tableau des variations de v se déduit de celui de la fonction carrée en rajoutant $\frac{7}{4}$

x	-3/2	0	7/2
Variations de v	4	7/4	14

4- a) $f = v \circ u$ avec $u : x \mapsto x - 2$

b) u est une fonction affine croissante et $u(3/2) = 0$.

x	0	3/2	5
Variations de u	-3/2	0	7/2

c) Sur $[0 ; 3/2]$, la fonction u est croissante, à valeurs dans $[-3/2 ; 0]$ et sur $[-3/2 ; 0]$ la fonction v est décroissante, à valeurs dans $[7/4 ; 4]$.

$$[0 ; 3/2] \xrightarrow{u} [-3/2 ; 0] \xrightarrow{v} [7/4 ; 4]$$

Donc la fonction $f = v \circ u$ est décroissante sur $[0 ; 3/2]$ et à valeurs dans $[7/4 ; 4]$.

Sur $[3/2 ; 5]$, la fonction u est croissante, à valeurs dans $[0 ; 7/2]$ et sur $[0 ; 7/2]$ la fonction v est croissante, à valeurs dans $[7/4 ; 14]$.

$$[3/2 ; 5] \xrightarrow{u} [0 ; 7/2] \xrightarrow{v} [7/4 ; 14]$$

Donc la fonction $f = v \circ u$ est croissante sur $[3/2 ; 5]$ et à valeurs dans $[7/4 ; 14]$.

x	0	3/2	5
Variations de f	4	7/4	14

d)

5- Le point M de la courbe \mathcal{C} le plus proche de A est le point de coordonnées $(\frac{3}{2} ; \sqrt{\frac{3}{2}})$.

Dans ce cas $AM^2 = \frac{7}{4}$ donc $AM = \sqrt{\frac{7}{4}}$