Récapitulatif sur le Barycentre

Barycentre de deux points :

Définition : On appelle barycentre des deux points A et B affectés respectivement des coefficients α et β tels que $\alpha+\beta\neq 0$, l'unique point G défini par : $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}=\vec{0}$

Construction de G : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta}\overrightarrow{AB}\quad\Rightarrow\quad \boldsymbol{G}\in(\boldsymbol{AB})$

Théorème de réduction : Pour tout point M du plan ou de l'espace on a : $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}=(\alpha+\beta)\,\overrightarrow{MG}$

Barycentre de trois points et plus

Définition : On appelle barycentre des trois points pondérés A, B et C affectés des coefficients α, β et γ, l'unique point G défini par : $\alpha\,\overrightarrow{GA}+\beta\,\overrightarrow{GB}+\gamma\,\overrightarrow{GC}=\vec{0}$.

Propriété : le barycentre de trois points pondérés non alignés , appartient au plan déterminé par ces trois points .

Avec Chasles, on montre par exemple que : $\overrightarrow{AG}=\dfrac{\beta}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AB}+\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta+\gamma}\overrightarrow{AC}$

Théorème de réduction : Soit G le barycentre des points pondérés $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ et $(C\,;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$, alors pour tout point M du plan ou de l'espace on a : $\alpha\,\overrightarrow{MA}+\beta\,\overrightarrow{MB}+\gamma\,\overrightarrow{MC}=(\alpha+\beta+\gamma)\,\overrightarrow{MG}$

Homogénéité : Si G est le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ et $(C\,;\gamma)$
Alors G est aussi le barycentre de $(A\,;k\alpha)$, $(B\,;k\beta)$ et $(C\,;k\gamma)$ où k réel non nul .

Principe de l'associativité du barycentre : Si G est le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ et $(C\,;\gamma)$ et si H est le barycentre de $(B\,;\beta)$, $(C\,;\gamma)$
Alors d'après le *théorème du barycentre partiel* :
G est le barycentre de $(A\,;\alpha)$, $(H\,;\beta+\gamma)$

Coordonnées barycentriques : le plan est rapporté à un repère $(O\,;\vec{i}\,;\vec{j})$.
Soit A, B et C trois points de coordonnées respectives $(x_A;y_A)$, $(x_B;y_B)$ et $(x_C;y_C)$
Les coordonnées du barycentre G du système de points pondérés $(A\,;\alpha)$, $(B\,;\beta)$ et $(C\,;\gamma)$ avec $\alpha+\beta+\gamma\neq 0$ sont : $x_G=\dfrac{\alpha.x_A+\beta.x_B+\gamma.x_C}{\alpha+\beta+\gamma}$ et $y_G=\dfrac{\alpha.y_A+\beta.y_B+\gamma.y_C}{\alpha+\beta+\gamma}$