

EXERCICE1(7 points)

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -\infty$$

La courbe représentative de f admet une asymptote verticale d'équation :

$$x = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = +\infty$$

La courbe représentative de f admet une asymptote horizontale d'équation :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$$

$$y = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$$

La courbe représentative de f admet une asymptote oblique d'équation :

$$y = x + 1$$

EXERCICE 3 (9 points)

1. Étudier la limite de f en -2 . En déduire une asymptote d à \mathcal{C} .

x	$-\infty$	-2	$+\infty$
$2x + 4$	$-$	\emptyset	$+$

On a la tableau de signes suivant :

$$\left. \begin{array}{l} \text{d'où } \lim_{x \rightarrow -2} (x^2 - 6x - 7) = (-2)^2 - 6 \times (-2) - 7 = 9 \\ \lim_{x \rightarrow -2} (2x + 4) = 2 \times (-2) + 4 = 0^+ \end{array} \right\} \text{ donc } \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = +\infty$$

Ladroite d d'équation $x = -2$ est asymptote verticale à \mathcal{C} .

2. (a) Étudier la limite de f en $+\infty$. $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty$

(b) Vérifier que pour tout $x > -2$, $f(x) = \frac{1}{2}x - 4 + \frac{9}{2x + 4}$

$$\frac{1}{2}x - 4 + \frac{9}{2x + 4} = \frac{(\frac{1}{2}x - 4)(2x + 4) + 9}{2x + 4} = \frac{\frac{1}{2}x \times 2x + \frac{1}{2}x \times 4 - 4 \times 2x - 4 \times 4 + 9}{2x + 4} = \frac{x^2 - 6x - 7}{2x + 4}$$

(c) Montrer que la droite Δ d'équation $y = \frac{1}{2}x - 4$ est asymptote oblique à \mathcal{C} .

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \left[f(x) - \left(\frac{1}{2}x - 4 \right) \right] = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{9}{2x + 4} = 0$$

Donc la droite Δ est bien asymptote oblique à \mathcal{C} en $+\infty$.

3. (a) Montrer que : $f'(x) = \frac{2x^2 + 8x - 10}{(2x + 4)^2}$

f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec :

$$\begin{array}{ll} u(x) = x^2 - 6x - 7 & u'(x) = 2x - 6 \\ v(x) = 2x + 4 & v'(x) = 2 \end{array}$$

On a donc

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - v'(x)u(x)}{[v(x)]^2} \\ &= \frac{(2x - 6)(2x + 4) - 2(x^2 - 6x - 7)}{[2x + 4]^2} \\ &= \frac{2x \times 2x + 2x \times 4 - 6 \times 2x - 6 \times 4 - 2 \times x^2 - 2 \times (-6x) - 2 \times (-7)}{(2x + 4)^2} \\ f'(x) &= \frac{2x^2 + 8x - 10}{(2x + 4)^2} \end{aligned}$$

(b) Étudier la signe de $f'(x)$ et dresser la tableau de variations de f .

Le numérateur est le carré d'un nombre réel, il est donc positif, et le signe de $f'(x)$ est le même que celui de $2x^2 + 8x - 10$.

Déterminons son discriminant $\Delta = 8^2 - 4 \times 2 \times (-10) = 144 = 12^2 > 0$

Il y a donc deux racines $x_1 = \frac{-8 - 12}{2 \times 2} = -5 \notin]-2; +\infty[$ et $x_2 = \frac{-8 + 12}{2 \times 2} = 1 \in]-2; +\infty[$.

On obtient le tableau de variations suivants :

x	-2	1	$+\infty$
$f'(x)$		- 0 +	
$f(x)$	$+\infty$		$+\infty$
		-2	

4. Déterminer l'équation de la tangente T à \mathcal{C} au point d'abscisse -1 .

On a $f'(-1) = \dots = -4$ et $f(-1) = \dots = 0$. L'équation de la tangente est :

$$y = f'(-1)[x - (-1)]$$

$$y = -4(x + 1)$$

$$y = -4x - 4$$

5. Sur la représentation graphique ci-dessous, tracer d , Δ , T et d'éventuelles tangentes horizontales.

